Az n-edik gyök fogalma, azonosságok

Def: Legyen a gyökkitevő páros szám, azaz $2k$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú. Valamely nemnegatív „a" szám $2k$-adik gyöke olyan nemnegatív szám, amelynek $2k$-adik hatványa „a".

Példa: $\sqrt[4]{625} = 5$, mert $5^4 = 625$;

$\sqrt[4]{-625}$ nincs értelmezve;

$\sqrt[4]{a^8} = a^2$, mert $(a^2)^4 = a^8$;

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$, mert $|a|^4 = a^4$.

Megjegyzés: páros gyökkitevő esetén a gyökjel alatt nemnegatív szám állhat.

Def: Legyen a gyökkitevő páratlan szám, azaz $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú. Valamely „a" szám ($a \in \mathbb{R}$) $2k+1$-edik gyöke olyan szám, amelynek $2k+1$-edik hatványa „a".

Példa:

$\sqrt[3]{125} = 5$, mert $5^3 = 125$;

$\sqrt[3]{-125} = -5$, mert $(-5)^3 = -125$;

$\sqrt[3]{a^6} = a^2$, mert $(a^2)^3 = a^6$;

$\sqrt[3]{a^3} = a$, mert $a^3 = a^3$.

Megjegyzés: páratlan gyökkitevő esetén a gyökjel alatt tetszőleges valós szám állhat.

A gyökvonás azonosságai

(Az alábbiakban minden páros kitevőjű gyökjel alatt csak nemnegatív szám állhat!)

Tétel: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, azaz szorzat n-edik gyöke felírható a tényezők n-edik gyökeinek szorzataként.

Biz: Emeljük az n-edik hatványra az egyenlőség mindkét oldalát:

bal oldal: $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$;

jobb oldal: $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$.

Tétel: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (ahol $b \neq 0$), azaz tört n-edik gyöke felírható a számláló és a nevező n-edik gyökének hányadosaként.

Biz: Emeljük az n-edik hatványra az egyenlőség mindkét oldalát:

bal oldal: $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$;

jobb oldal: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{a})^n} = \frac{a}{b}$.

Tétel: $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, azaz a hatvány n-edik gyökét felírhatjuk az alap n-edik gyökének hatványaként.

Biz: a, Ha k pozitív egész szám, azaz $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{k \text{ db}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a}}_{k \text{ db}} = (\sqrt[n]{a})^k;$$

b, Ha $k=0$ és $a \neq 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az azonosság, hiszen ekkor mindkét oldal 1-gyel egyenlő;

c, Ha k negatív egész szám, azaz $k \in \mathbb{Z}^-$: a bizonyítást visszavezetjük pozitív egész hatványkitevő esetére. Legyen $l \in \mathbb{Z}^+$, így $k = -l$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{-l}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^l}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^l}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^l} = (\sqrt[n]{a})^{-l} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Tétel: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, azaz gyöknek a gyökét felírhatjuk úgy is, hogy a gyökjelek alatti kifejezésből olyan kitevővel vonunk gyököt, amely az eredeti gyökkitevők szorzata.

Biz: Emeljük n-edik hatványra, majd k-adik hatványra az egyenlőség mindkét oldalát:

bal oldal: $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n = \sqrt[k]{a}$; majd $\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$;

jobb oldal: $\left(\sqrt[nk]{a}\right)^n$; majd $\left[\left(\sqrt[nk]{a}\right)^n\right]^k = \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk} = a$.

Megjegyzés: az n-edik gyök azonosságaiból adódnak a négyzetgyök azonosságai is:

a, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

b, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$;

c, $\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$.

Tényező kihozatala a gyökjel alól:

Ha a gyök alatti kifejezés olyan tényezőkre bontható, amelyek közül az egyiken el tudjuk végezni a gyökvonást, akkor az egyik tényezőt „ki tudjuk hozni" a gyökjel alól.

Példa: $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt[3]{2}$;

Megjegyzés: fokozottan figyelni kell betűs kifejezések kihozatalára. Ha páros gyökkitevő esetén olyan páros kitevőjű betűs kifejezést hozunk ki a gyök alól, melyből páratlan kitevőjű lesz, abszolútértékbe tesszük.

Példa: a) $\sqrt[4]{4a^8} = a^2\sqrt[4]{4}$;

b) $\sqrt[4]{4a^{12}} = |a^3|\sqrt[4]{4}$;

c) $\sqrt[3]{5a^6} = a^2\sqrt[3]{5}$;

d) $\sqrt[3]{5a^9} = a^3\sqrt[3]{5}$.

Tényező bevitele a gyökjel alá:

Ha a gyök szorzódát a gyök kitevőjére emeljük, akkor azzal szorozhatjuk a gyökjel alatti kifejezést. Így a gyök előtti szorzótényezőt „be tudjuk vinni" a gyökjel alá.

Példa: $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$;

Megjegyzés: fokozottan figyelni kell betűs kifejezések beírására. Ha páros gyökkitevő esetén olyan betűs kifejezést viszünk be a gyök alá, amely lehet pozitív is, negatív is, két módon kell eljárni:

Példa: a) $2a\sqrt[4]{3} = \begin{cases} \sqrt[4]{16a^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48a^4}, & \text{ha } a \geq 0; \\ -\sqrt[4]{16a^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48a^4}, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$

b) $2a\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24a^3}$;

c) $2a\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{16a^4 \cdot a} = \sqrt[4]{16a^5}$, mivel $\sqrt[4]{a}$ esetében $a \geq 0$ lehet csak;

d) $2a\sqrt[4]{2a^2}$, ahol $a < 0$

ekkor $2a\sqrt[4]{2a^2} = -\sqrt[4]{16a^4 2a^2} = -\sqrt[4]{32a^6}$, mivel a feltétel miatt $a < 0$.

(Z|376) $(\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{135}-2\sqrt[3]{40})\cdot(10\sqrt[3]{72}+5\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{15}-4\sqrt[3]{120}+2\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{200})=$

$=(2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{5})\cdot(20\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{15}-8\sqrt[3]{15}+2\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{25})=$

$=(5\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{5})(25\sqrt[3]{9}-10\sqrt[3]{15}+4\sqrt[3]{25})=5^3\cdot 3+2^3\cdot 5=375+40=\underline{415}$;

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ alapján.

(Z|359) $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=\sqrt[3]{(a+b)^3}=\underline{a+b}$.

(Z|363) a, $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}-$

$-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\underline{2}$;

b, $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}=\sqrt[4]{16+16\sqrt{3}+12}-\sqrt[4]{16-16\sqrt{3}+12}=\sqrt[4]{(4+2\sqrt{3})^2}-$

$-\sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-$

$-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)=\underline{2}$.

(Z|372) a, $\frac{b}{\sqrt{c}-2}=\frac{b}{\sqrt{c}-2}\cdot\frac{\sqrt{c}+2}{\sqrt{c}+2}=\underline{\frac{b(\sqrt{c}+2)}{c-4}}$;

b, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b})}{a^3-b}=\underline{\frac{a^2-\sqrt{ab}}{a^3-b}}$;

c, $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{5^2})}{3-5}=-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$.

(Z|394) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}=\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6}}}=\sqrt[3]{a\sqrt[20]{a^6}}=\sqrt[3]{\sqrt[20]{a^{26}}}=\sqrt[60]{a^{26}}=\underline{\sqrt[30]{a^{13}}}$.

(Z|396) $\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt{\sqrt[3]{\frac{b^5}{a^4}}}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^5}{a^4}}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{\frac{a^6}{b^6}\cdot\frac{b^5}{a^4}}}=\underline{\sqrt[30]{\frac{a^2}{b}}}$.

Törtkitevőjű hatványok

Def: egy pozitív szám $\frac{m}{n}$-edik hatványa az alapnak m-edik hatványából vont n-edik gyöke, azaz $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ahol $a>0$; $m \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$.

*

Megjegyzés: a, $n=1$ esetén $a^{\frac{m}{1}} = a^m$, azaz egész kitevőjű hatványok bennfoglaltatnak;

b, ha a kitevő negatív előjelű, akkor az ismert átalakítással pozitív kitevőre vezethetjük vissza.

Példa: a, $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$;

b, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

c, $2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$.

* Az egyértelműség miatt, hiszen
$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$, mint elvárjuk;
$(-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$, ellentmondás

Megjegyzés: a törtkitevőjű hatványokra ugyanazok az azonosságok érvényesek, mint az egész kitevőjű hatványokra. (Továbbá az azonosságok igazak maradnak irracionális kitevőkre is!)

Feladatok:

(Z|393) $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}}{(a^{\frac{1}{2}})^3 \cdot a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{20}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{3}{20}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[20]{a^3}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[60]{a^9}}{\sqrt[60]{b^{20}}} = \sqrt[60]{\frac{a^9}{b^{20}}}$; $a>0$; $b>0$.

(Z|392) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{5^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{9^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 15^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{15}$

(Z|401) $10a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - 1) - (5a^{\frac{2}{3}} - 2)(2a^{\frac{1}{3}} + 3) = 10a - 10a^{\frac{2}{3}} - (10a - 4a^{\frac{1}{3}} + 15a^{\frac{2}{3}} - 6) =$
$10a - 10a^{\frac{2}{3}} - 10a + 4a^{\frac{1}{3}} - 15a^{\frac{2}{3}} + 6 = -25a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}} - 6 = -25\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a} + 6$; $a \geq 0$.

(Z|399.b) $\frac{(a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{-\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{24}}}{a^{\frac{13}{12}}} = \frac{\sqrt[24]{a}}{\sqrt[12]{a^{13}}} = \frac{\sqrt[24]{a}}{\sqrt[24]{a^{26}}} = \sqrt[24]{\frac{a}{a^{26}}} = \sqrt[24]{\frac{1}{a^{25}}} = \sqrt[24]{\frac{1}{a^{24} \cdot a}} = \frac{1}{a}\sqrt[24]{\frac{1}{a}}$; $a>0$.

Z|391 397 399/a
392 398/b 400