Inverz függvény

Definíció: Legyen adott az $f(x)$ kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésű függvény. Az $f(x)$ függvény *inverz*én azt az $f^{-1}(x)$ függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya az $f(x)$ értékkészlete, és ha $f(x)$ az „*a*” helyen a „*b*” értéket veszi fel, akkor $f^{-1}(x)$ függvény értéke a „*b*” helyen „*a*” lesz.

Megjegyzés:

a) A definícióból következően, hogy ha $f(x)$ inverze $f^{-1}(x)$, akkor $f^{-1}(x)$ inverze $f(x)$, továbbá $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

b) Ha $f(x)$ szigorúan monoton növekvő (csökkenő), akkor létezik inverze, és inverze is szigorúan monoton növekvő (csökkenő).

c) $f^{-1}(x)$ és $f(x)$ görbék az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozóan egymásnak tükörképei.

d) Az inverz meghatározásánál az $y = f(x)$ egyenletből kifejezzük az *x*-et *y*-nal és utána az *x* és *y* jelölést felcseréljük.

<u>*1. Példa*</u>: Határozza meg az $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$ függvény inverzét!

Megoldás:

A függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért van inverze (ÉT: **R** és ÉK: **R**).

Az $y = -\frac{2}{3}x + 5$ összefüggésből kifejezzük *x*-et: $x = -\frac{3}{2}y + \frac{15}{2}$.

Felcseréljük *x* és *y* jelölést: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$,

azaz az inverz függvény: $f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$ (ÉT: **R** és ÉK: **R**).

<u>*2. Példa*</u>: Határozza meg az $f(x) = 2\ln\frac{3x-1}{5} + 3$ függvény inverzét!

Megoldás:

A függvény szigorúan monoton növekvő, ezért van inverze (ÉT: $x > \frac{1}{3}$ és ÉK: **R**).

Az $y = 2\ln\frac{3x-1}{5} + 3$ összefüggésből kifejezzük *x*-et: $x = \frac{5}{3}e^{\frac{y-3}{2}} + \frac{1}{3}$.

Felcseréljük *x* és *y* jelölést: $y = \frac{5}{3}e^{\frac{x-3}{2}} + \frac{1}{3}$,

azaz az inverz függvény: $f^{-1}(x) = \frac{5}{3}e^{\frac{x-3}{2}} + \frac{1}{3}$ (ÉT: **R** és ÉK: $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$).

3. Példa: Határozza meg az $f(x)=x^2+1$ függvény inverzét!

Megoldás:

A függvény az értelmezési tartománya egészén nem szigorúan monoton, ezért az egész függvény inverzéről nem beszélhetünk.

Megjegyzés:

A függvény megfelelően leszűkítve invertálható. Legyen pl. $f(x)=x^2+1$, ahol $x\geq 0$. Ebben az intervallumban a függvény szigorúan monoton növekvő, tehát van inverze (ÉT: $x\geq 0$ és ÉK: $f(x)\geq 1$).
Az $y=x^2+1$ összefüggésből kifejezzük *x*-et: $x=\sqrt{y-1}$ (Itt figyelembe vettük, hogy $x\geq 0$).
Felcseréljük *x* és *y* jelölést: $y=\sqrt{x-1}$,
azaz az inverz függvény: $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ (ÉT: $x\geq 1$ és ÉK: $[0;\infty)$).

Feladatok:

Írja fel az alábbi függvények inverzeit! Ha a teljes értelmezési tartományukon nem invertálhatók, akkor válasszon megfelelő intervallumot! Adja meg mindkét függvény értelmezési tartományát és értékkészletét is!

a) $f(x)=1-3x$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$;

d) $f(x)=3e^{\frac{x+2}{5}}-6$;

e) $f(x)=5\lg(2x+1)-2$;

f) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3x-1}{4}}+1$;

g) $f(x)=2x^2-1$;

h) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

Összetett függvény

Definíció: Az $f(x)$ külső függvényből és a $g(x)$ belső függvényből álló $F(x)=f(g(x))$ függvényt *összetett függvény*nek nevezzük, melynek értelmezési tartománya a $g(x)$ értelmezési tartományának azon x_0 pontjai, amelyekre $g(x_0)$ hozzátartozik az $f(x)$ értelmezési tartományához.

Megjegyzés: - Az összetett függvény jelölésénél gyakori az $f\circ g$ szimbólum is.
- A definíció szerint az $f\circ g$ összetett függvény akkor létezik, ha $R_g\cap D_f\neq\varnothing$ és $D_{f\circ g}=g^{-1}(R_g\cap D_f)$.

1. Példa:

Határozza meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha $f(x)=\frac{1}{x}$ és $g(x)=2^x$.

Megoldás:

$f(x)=\frac{1}{x}$, ahol $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ és $R_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, illetve $g(x)=2^x$, ahol $D_g=\mathbf{R}$ és $R_g=\mathbf{R}^+$.

Mivel $R_g \cap D_f=\mathbf{R}^+$, ezért létezik $f \circ g$, és $D_{f\circ g}=g^{-1}(\mathbf{R}^+)$.

Az értelmezési tartomány kiszámítása: $0<2^x<\infty$, melyből $x\in\mathbf{R}$.

Tehát a megoldás: $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2^x}$, ahol ÉT: $\mathbf{R}$ és ÉK: $\mathbf{R}^+$.

Mivel $R_f \cap D_g=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, ezért létezik $g \circ f$, és $D_{g\circ f}=f^{-1}(\mathbf{R}\setminus\{0\})$.

Az értelmezési tartomány kiszámítása: $-\infty<\frac{1}{x}<0$ vagy $0<\frac{1}{x}<\infty$,

melyből $x\in\mathbf{R}^-$ vagy $x\in\mathbf{R}^+$, azaz $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Tehát a megoldás: $(g\circ f)(x)=2^{\frac{1}{x}}$, ahol ÉT: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ és ÉK: $\mathbf{R}^+\setminus\{1\}$.

(*Megjegyzés*: Dolgozhatunk közvetlenül az inverz függvénnyel is, azaz $g^{-1}(x)=\log_2 x$ és $g^{-1}(\mathbf{R}^+)=\mathbf{R}$, illetve $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$ és $f^{-1}(\mathbf{R}\setminus\{0\})=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. A megoldásban szereplő módszer azonban egyszerűbben vezet megoldáshoz.)

2. Példa:

Határozza meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha $f(x)=3x+5$, ahol $x\in[1;\ 100]$ és $g(x)=2^x+1$.

Megoldás:

$f(x)=3x+5$, ahol $D_f=[1;\ 100]$ és $R_f=[8;\ 305]$, illetve $g(x)=2^x+1$, ahol $D_g=\mathbf{R}$ és $R_g=(1;\ \infty)$.

Mivel $R_g \cap D_f=(1;\ 100]$, ezért létezik $f \circ g$, és $D_{f\circ g}=g^{-1}((1;\ 100])$.

Az értelmezési tartomány kiszámítása: $1<2^x+1\le 100$

$0<2^x\le 99$

$-\infty<x\le \log_2 99$, azaz $x\in(-\infty;\ \log_2 99\ ]$.

Tehát a megoldás: $(f\circ g)(x)=3(2^x+1)+5=3\cdot 2^x+8$, ahol ÉT: $x\le\log_2 99$ és ÉK: $(8;\ 305]$.

Mivel $R_f \cap D_g=[8;\ 305]$, ezért létezik $g \circ f$, és $D_{g\circ f}=f^{-1}([8;\ 305])=D_f$, azaz $x\in[1;\ 100]$.

Tehát a megoldás: $(g\circ f)(x)=2^{3x+5}+1=32\cdot 8^x+1$, ahol ÉT: $x\in[1;\ 100]$ és ÉK: $[\,257;\ 32\cdot 8^{100}+1\,]$.

3. Példa:

Határozza meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \log_2 x$.

Megoldás:

$f(x) = \sin x$, ahol $D_f = \mathbf{R}$ és $R_f = [-1; 1]$, illetve $g(x) = \log_2 x$, ahol $D_g = \mathbf{R}^+$ és $R_g = \mathbf{R}$.
Mivel $R_g \cap D_f = \mathbf{R}$, ezért létezik $f \circ g$, és $D_{f \circ g} = g^{-1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^+$.
Tehát a megoldás: $(f \circ g)(x) = \sin \log_2 x$, ahol ÉT: $\mathbf{R}^+$ és ÉK: [-1; 1].

Mivel $R_f \cap D_g = (0; 1]$, ezért létezik $g \circ f$, és $D_{g \circ f} = f^{-1}((0; 1])$.
Az értelmezési tartomány kiszámítása: $0 < \sin x \leq 1$, melyből $0 + k2\pi < x < \pi + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.
Tehát a megoldás: $(g \circ f)(x) = \log_2 \sin x$, ahol ÉT: $x \in (k2\pi; \pi + k2\pi)$, ÉK: $(-\infty; 0]$ és $k \in \mathbf{Z}$.

Feladatok:

1. Határozza meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha

a) $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = \lg x$ és $g(x) = \dfrac{1}{\lg x}$;

c) $f(x) = \ln x$ és $g(x) = 1 - x$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és $g(x) = x^5$;

e) $f(x) = x^3$ és $g(x) = x - 3$, ahol $x \in [1; 100]$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és $g(x) = \sqrt{x}$;

g) $f(x) = x - 10$, ahol $x \in [1; 100]$ és $g(x) = x^2 + 1$.

2. Határozza meg az $f \circ g \circ k$, $g \circ f \circ k$ és $k \circ f \circ g$ összetett függvényeket, ha

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$ és $k(x) = x + 2$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$ és $k(x) = \sin x$;

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$ és $k(x) = \dfrac{1}{x}$.