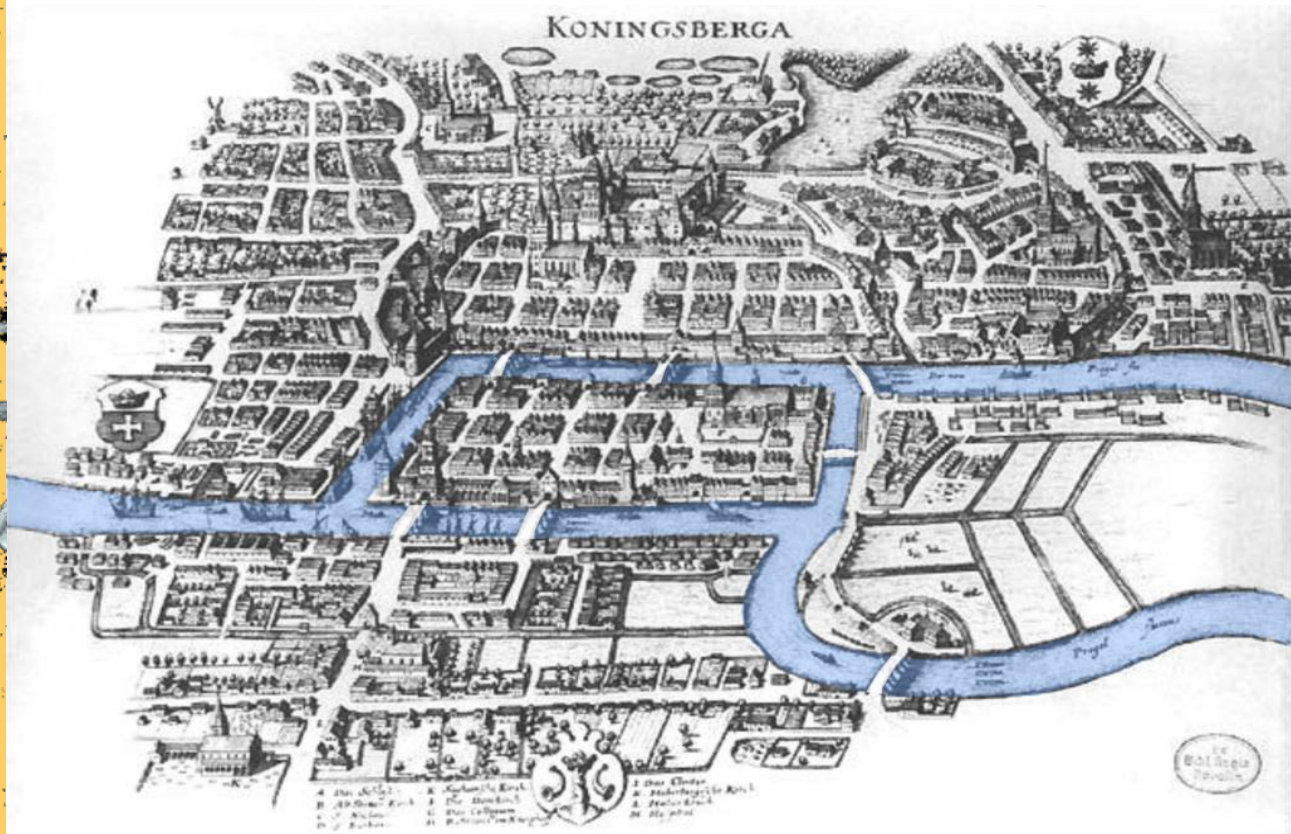
BALOGH NORBERT

GRÁFELMÉLET

JEGYZET ÉS PÉLDATÁR

az emelt szintű matematika érettségi előkészítő segédanyaga



GÖDÖLLŐI TÖRÖK IGNÁC GIMNÁZIUM
GÖDÖLLŐ, 2021

NAT 2020

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **2**
1. Gráfelmélet alapfogalmai **3**
1.1 Izolált pont *3*
1.2 Párhuzamos él, hurokél *3*
1.3 Egyszerű gráf *3*
1.4 Részgráf *3*
1.5 Fokszám *3*
Feladatok: *3*
2. Speciális gráfok **4**
2.1 Élnélküli gráf *4*
2.2 Teljes gráf *4*
2.3 Komplementer gráf *4*
3. Gráfok izomorfiája **4**
Feladatok: *5*
4. Gráfelméleti tételek **5**
Feladatok: *6*
5. Összefüggő gráfok **6**
5.1 Vonal, út *6*
5.2 Összefüggő gráf *6*
5.3 Euler-vonal *6*
5.4 Hamilton-kör (út) *7*
5.5 Fagráf *7*
Feladatok: *10*
Felhasznált irodalom, források **12**

1. Gráfelmélet alapfogalmai

Definíció: A gráf pontok és az őket összekötő élek együttese.

Megjegyzés: A gráf pontjait szögpontoknak, illetve csúcsoknak is nevezzük. Ha a gráf élei irányítottak, *irányított gráfról* beszélünk.

Definíció: Ha egy pontból nem fut ki él, akkor azt a gráf *izolált pontjának* nevezzük.

Definíció: Ha két pontot két vagy több él köt össze, akkor ezeket *párhuzamos* (vagy *többszörös*) *éleknek* nevezzük.

Definíció: Ha egy élre csak egy pont illeszkedik, azaz egy él két végpontja azonos, akkor azt az élt *hurokélnek* nevezzük.

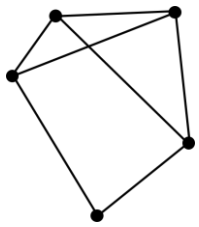
Definíció: Ha egy gráfban nincsenek párhuzamos élek és nincs hurokél, akkor azt *egyszerű gráfnak* nevezzük.

Definíció: Egy G gráf *részgráfja* olyan gráf, ami G bizonyos csúcsaiból és azok között bizonyos éleiből áll.

Definíció: A gráf egy pontjába összefutó éleinek számát a pont *fokszámának* nevezzük.

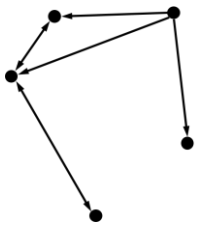
Példák:

a)



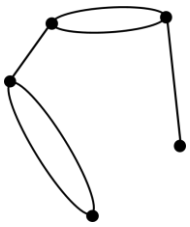
(egyszerű) gráf

b)



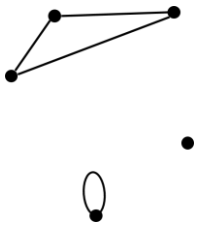
irányított gráf

c)



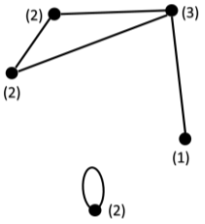
gráf többszörös éllel

d)



gráf izolált ponttal és hurokéllel

e)



fokszámok feltüntetése

Feladatok:

F.1 Rajzoljon 5 szögpontú, 8 élű egyszerű gráfot, illetve 7 szögpontú, 12 élű egyszerű gráfot! Határozza meg az egyes pontok fokszámát is!

F.2 Rajzoljon olyan 4 szögpontú egyszerű gráfot, amelyben 1 harmad, 2 másod- és 1 elsőfokú pont van!

F.3 Rajzoljon olyan 5 szögpontú egyszerű gráfot, amelyben a fokszámok: 1, 2, 2, 2, 3!

F.4 A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábbról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Rajzolja fel a négy-tagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját! (*KSZÉV 2010.10/I/11)*

F.5 Józsefnek 3 gyermeke volt: Andor, Mátyás és Dávid. Mátyásnak 3 fia született, Dávidnak 1, Andornak egy sem. Szemléltesse gráffal az apa-fiú kapcsolatokat! Hány csúcsa és hány éle van ennek a gráfnak? (*KSZÉV-NY 2007.05/I/8)*

F.6 Egy öttagú társaságban a házigazda mindenkit ismer, minden egyes vendége pedig pontosan két embert ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Szemléltesse rajzzal az ismeretségeket! (*KSZÉV Minta (1) 2004.05/I/7*)

2. Speciális gráfok

Definíció: Azokat a gráfokat, amelyeknek nincsenek élei, *élnélküli gráfoknak* nevezzük.

Definíció: Azokat az egyszerű gráfokat, amelyekben bármely két pont éllel van összekötve, *teljes gráfoknak* nevezzük.

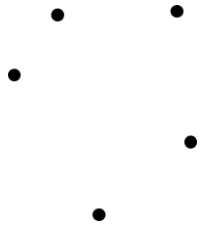
Megjegyzés: A síkon egy *n* oldalú konvex sokszög oldalainak és átlóinak megrajzolásával egy *n* pontú teljes gráfot kapunk.

Definíció: Egy *G* gráf *komplementerének* nevezzük azt a $\bar{G}$-vel jelölt gráfot, amelynek pontjai a *G* pontjai, és élei a teljes gráf azon élei, amelyek *G*-ben nem szerepeltek.

Megjegyzés: Nyilvánvalóan $\bar{\bar{G}} = G$.

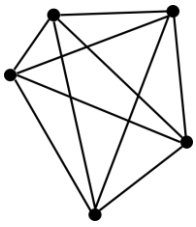
Példák:

a)



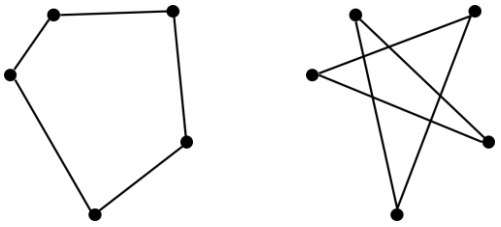
élnélküli gráf

b)



teljes gráf

c)



komplementer gráf

3. Gráfok izomorfiája

Definíció: Két gráfot akkor nevezünk *izomorfnak*, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

Megjegyzés:

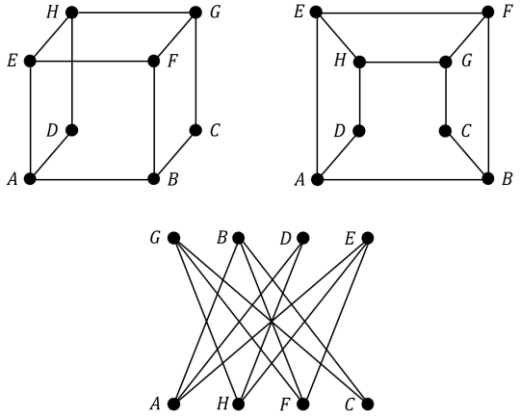
- Az izomorfiát úgy is lehetne fogalmazni, hogy a két gráf csupán máshogy van "hajtogatva".

- Ezek alapján az izomorf gráfoknak ugyanannyi élük és csúcsuk van, és az egymásnak megfelelő csúcsok fokszáma megegyezik.
- Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak egymással.

Példa:

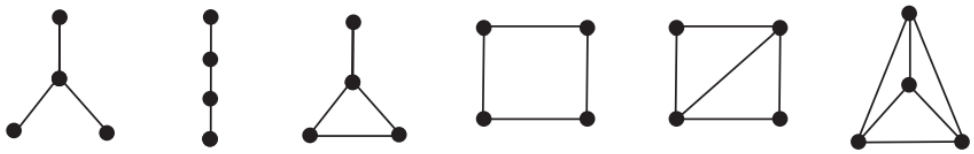
Az alábbiakban izomorf gráfokat láthatunk. Megfelelő betűzéssel ellenőrizhetjük a pontok kapcsolatát táblázattal!

	kapcsolódó pontok		
A	*B*	*D*	*E*
B	*A*	*C*	*F*
C	*B*	*G*	
D	*A*	*H*	
E	*A*	*F*	*H*
F	*B*	*E*	*G*
G	*C*	*F*	*H*
H	*D*	*E*	*G*



Példa:

Néhány lehetséges négy szögpontú különböző, azaz nem izomorf gráf



Feladatok:

F.7 Rajzolja fel az összes, nem izomorf 3 szögpontú egyszerű gráfot!

F.8 Keressen olyan 4 szögpontú egyszerű gráfot, amely izomorf a komplementerével!

F.9 Hány olyan 4 pontú, 3 élű gráf van, amelynek vannak többszörös élei? (*ESZÉV Minta (3) 2015.10/4*)

4. Gráfelméleti tételek

Tétel: Bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Megjegyzés: A tétel szerint a fokszámok összege mindig páros szám. Ez azonban csak szükséges, de nem elégséges feltétele egyszerű gráf létezésének.

Tétel: Bármely gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Tétel: Bármely egyszerű gráfban van legalább két olyan csúcs, amelynek a fokszáma megegyezik.

Tétel: Egy n pontú teljes gráfban az élek száma:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Feladatok:

F.10 Rajzoljon egy 2-, 3-, 4-, 5-, 6-pontú teljes gráfot! Melyiknek hány éle van?

F.11 Egy 5 pontú egyszerű gráfnak 8 éle van. Mekkorák lehetnek a csúcsok fokszámai? Rajzolja is le az egyes eseteket!

F.12 Hány pontú az a teljes gráf, amelynek *a)* 91; *b)* 153; *c)* 351 éle van?

F.13 Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, melynek

a) éleinek a száma a csúcsok számának 11-szerese;
b) éleinek a száma a csúcsai számának háromszorosánál 9-cel nagyobb?

F.14 Az iskolák közötti labdarúgó-bajnokságra 12 csapat jelentkezett. Eddig 16 mérkőzést játszottak már le. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal csak egy mérkőzést játszik? Válaszát indokolja!

F.15 Felsoroltuk egy 5 csúcspontú egyszerű gráf csúcsainak fokszámait, öt különböző esetet. Melyik nem lehetséges az alábbiak közül? Indokolja válaszát!

(A) 1, 1, 1, 1, 0; (B) 2, 2, 2, 2, 2; (C) 3, 3, 3, 3, 3; (D) 2, 2, 3, 3, 4; (E) 2, 2, 2, 4, 4.

F.16 Egy társaságban 5 lány és 5 fiú táncolt. Kilencen pontosan megmondták, hogy hány partnerrel táncoltak. Számuk 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3 volt. A tizedik vagy 3 vagy 4 partnerre emlékezett. Megállapítható-e a tizedik ember partnereinek pontos száma?

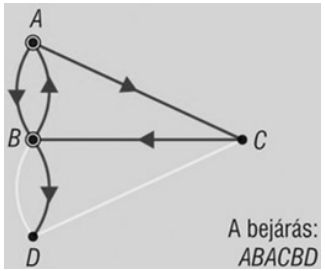
5. Összefüggő gráfok

Definíció: A gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amelyben egyetlen él sem szerepel egynél többször, *vonalnak* nevezzük. (Lehetnek olyan pontok, amelyek többször is előfordulnak.)

Definíció: A gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször, *útnak* nevezzük.

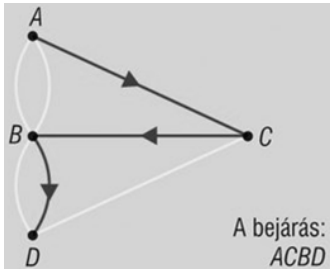
Példa:

a)



vonal a gráfban

b)



út a gráfban

Definíció: Egy gráfot *összefüggőnek* nevezünk, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

Megjegyzés: A nulla hosszú utat is megengedjük, tehát egyetlen izolált pont is összefüggő.

Definíció: Az olyan vonalat, amely a gráf minden élét tartalmazza, *Euler-vonalnak* nevezzük. Az Euler-vonal lehet nyitott (*Euler-út*), ha a kezdőpontja nem egyezik meg a végpontjával, vagy lehet zárt, ha a kezdő- és végpontja megegyezik (*Euler-kör*).

Megjegyzés: Euler-vonal létezésekor a gráf „végigrajzolható” a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy egy vonalon csak egyszer haladunk át.

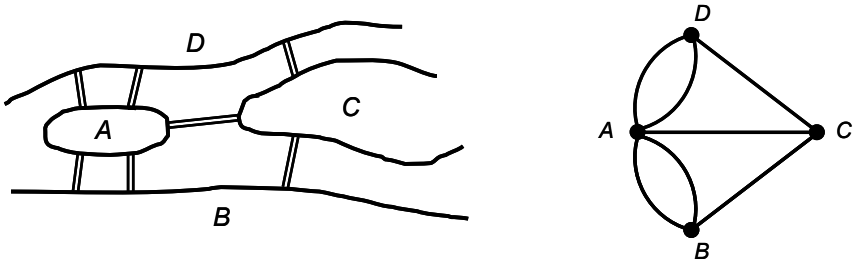
Tétel: Ha egy összefüggő gráfban két pont fokszáma páratlan, a többi pont fokszáma páros, akkor a gráfban van nyitott Euler-vonal.

Megjegyzés: Az Euler-vonal kezdőpontja az egyik, végpontja a másik páratlan fokszámú pont lesz.

Tétel: Ha egy összefüggő gráfban minden pont fokszáma páros, akkor a gráfban van zárt Euler-vonal.

Példa:

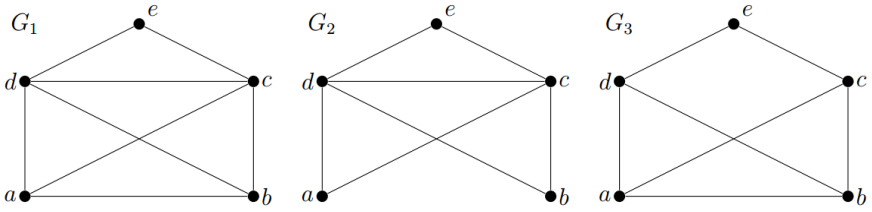
A „Königsbergi hidak problémája” Leonard Euler-től (1736): Königsberg (ma Kalinyingrád) városa a Pragel folyó két partján és a folyó két szigetén fekszik. A négy városrészt hét híd köti össze. Kérdés, hogy lehet-e olyan sétát tenni a városban, amelynek során minden hídon pontosan egyszer kelünk át.



Az előző tételek értelmében sétát nem lehet tenni úgy, hogy minden hidat pontosan egyszer érintsünk, hiszen az ábra gráfján minden pont fokszáma páratlan.

Példa:

A G_1 fokszámsorozata 2, 3, 3, 4, 4, így ebben nincs zárt Euler-vonal, de nyitott Euler-vonal van, például az a, d, e, c, d, b, c, a, b vonal. A G_2 fokszámsorozata 2, 2, 2, 4, 4, így ebben van zárt Euler-vonal, például az a, d, e, c, d, b, c, a vonal. A G_3 fokszámsorozata 2, 3, 3, 3, 3, így ebben zárt és nyitott Euler-vonal sincs.



Definíció: Az olyan utat, amelynek kezdő és végpontja azonos, *körnek* nevezzük.

Megjegyzés: A körben szereplő élek száma a kör hossza. A hurokél speciálisan 1 hosszú kör.

Tétel: Ha egy egyszerű véges gráf minden pontjának foka legalább 2, akkor van kör a gráfban.

Tétel: Ha egy *n*-pontú gráfnak legalább *n* éle van, akkor van a gráfban kör.

Megjegyzés: Ha egy összefüggő gráf kört tartalmaz, és a körnek valamely élét elhagyjuk, akkor is összefüggő gráfot kapunk.

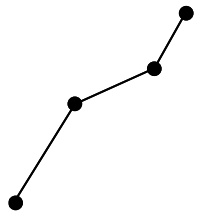
Definíció: Egy gráf azon körét (útját), amely a gráf összes pontján pontosan egyszer halad keresztül, a gráf *Hamilton-körének (Hamilton-útjának)* nevezzük.

Megjegyzés: Egy Hamilton-kör tetszőleges élét elhagyva egy Hamilton-utat kapunk. Hamilton-kör létezésére nem ismert szükséges és elégséges feltételt adó tétel. Egy lehetséges elégséges feltételt adó tétel:

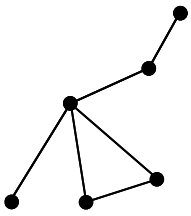
Tétel: Ha egy *n* szögpontú egyszerű gráf minden pontja legalább $\frac{n}{2}$-edfokú, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Példák:

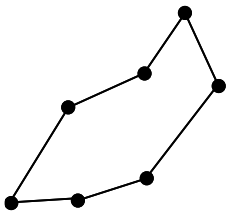
a) út



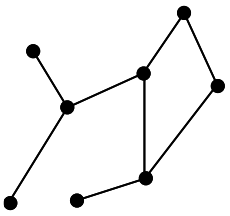
b) vonal



c) kör

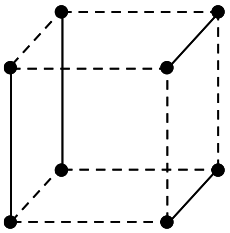


d) összefüggő gráf



Példa:

Az ábrán lévő, térbeli gráf szaggatott vonallal jelölt köre Hamilton-kör.



Definíció: Az olyan összefüggő gráfokat, amelyekben nincs kör, *fának* nevezzük.

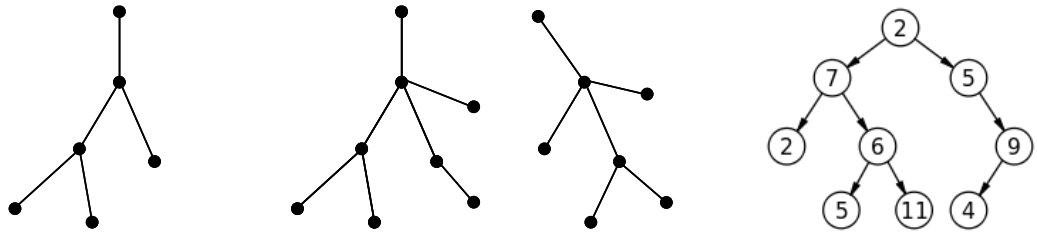
Megjegyzés: A fagráf elsőfokú csúcsait *leveleknek* hívjuk.

Definíció: A több fából álló gráfot *erdőnek* vagy *ligetnek* nevezzük (vagy ami ezzel ekvivalens: az erdők körmentes gráfok).

Megjegyzés: A számítástechnikában fontos szerepet játszanak az un. *bináris fák*, melyek olyan irányított fa gráfok, ahol egy csúcsból legfeljebb két él indul ki.

Példák:

a) fagráf *b) erdő* *c) bináris fa*



Tétel: Minden többpontú fának van legalább két elsőfokú pontja.

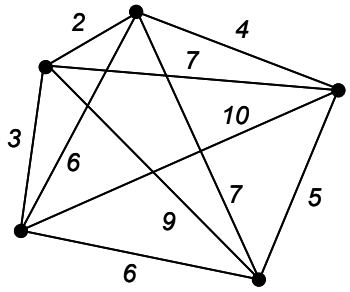
Tétel: Az n pontú fának $n-1$ éle van.

Megjegyzés: (További tételek fa gráfokkal kapcsolatban)

- A fák bármely két pontját egyetlen út köti össze.
- Egy fának bármely élét elhagyva már nem lenne összefüggő gráf.
- Ha egy fának bármely két olyan pontját összekötjük, amely eddig még nem volt összekötve, akkor a gráfban már lenne kör.

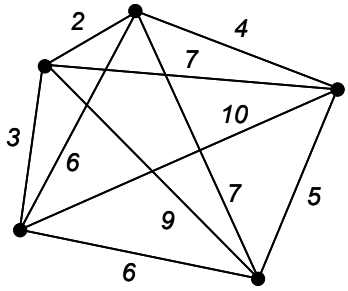
Példa:

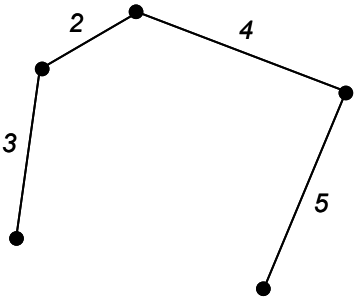
Öt község között úthálózatot kell építeni, úgy hogy az utakon bármely faluból eljuthassunk bármely más faluba. Minden útnak van egy meghatározott építési költsége. Ennek ismeretében kell megtervezni egy olyan összekötő úthálózatot, amelynek építése minimális költségű.



Megoldás:

Szemléltessük a feladat megoldását gráffal. Az élekre tüntessük fel a költségek arányát. A megmaradó részgráfnak a feladat feltétele szerint összefüggőnek kell maradnia. Ha egy körnek elhagyjuk valamelyik élét, akkor az új gráf összefüggő marad. Hagyjuk el a legnagyobb költségű élét. Az eljárást folytatva a megmaradt minimális költségű részgráf fa lesz (*minimális feszítőfa*).





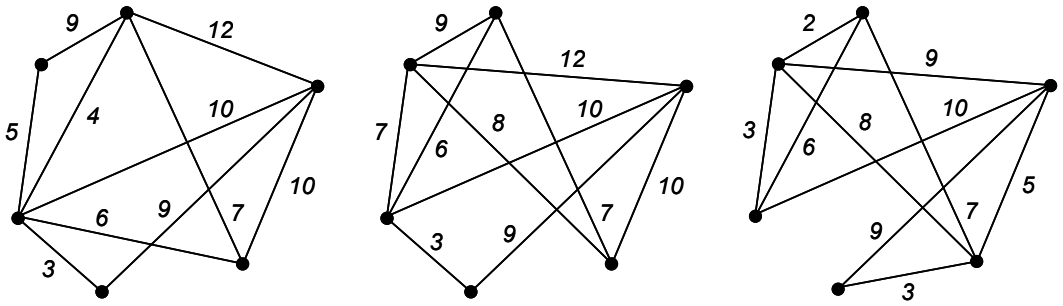
Feladatok:

F.17 Az egyik megye 22 települése között ötben van kórház. Legalább hány olyan utat kell megépíteni, amely két-két települést köt össze azért, hogy bármely településről legalább az egyik kórházba el lehessen jutni kiépített úton?

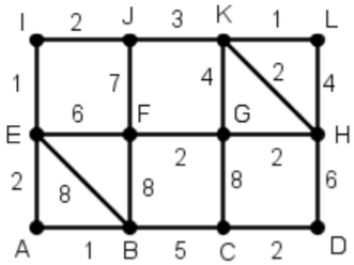
F.18 Egy 6 pontú, egyszerű, összefüggő gráfban van 1, 2, 3, 4 és 5 fokú pont is. Mennyi lehet a hatodik pont foka? Indokolja válaszát!

F.19 Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben az élek száma több, mint a csúcsok számának ötszöröse, de kevesebb, mint a hatszorosa?

F.20 Határozza meg a „minimális költségű” összefüggő részgráfot!



F.21 12 település között vízvezetékrendszert terveznek. A települések helyzetét és a közöttük lévő csatornafektetés összköltségeit az alábbi ábra modellezi. Az A település csatlakozik az országos hálózatra. Adja meg a leggazdaságosabban megépíthető rendszert úgy, hogy minden település be legyen kötve a hálózatba!



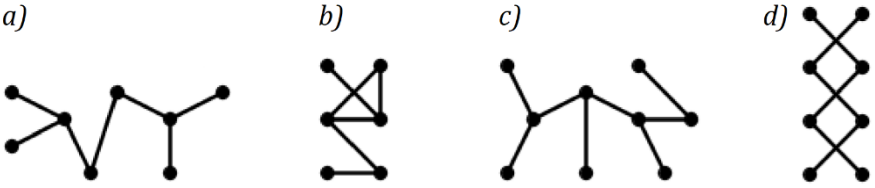
F.22 Egy 8 fős baráti összejövetelen egyesek kézfogással köszöntötték egymást. Lehetséges-e, hogy minden jelenlévő különböző számú emberrel fogott kezet?

F.23 Van-e olyan n pontú egyszerű gráf, amelyik izomorf a komplementerével, ha
a) $n = 5$,
b) $n = 6$?

F.24 Van-e olyan 8 csúcsú fa, melyben a csúcsok fokszámai az alábbiak:
a) 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
b) 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3,
c) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4,
d) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3?

F.25 Döntse el, melyik fagráf az alábbiak közül! Mennyi a levelek száma?

a) *b)* *c)* *d)*



F.26 Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány csúcsa van az erdőnek?

F.27 Hány különböző 5 csúcsú fa van, ha a csúcsait nem különböztetjük meg?

F.28 Hány különböző 3 csúcsú fa van, ha a csúcsait megkülönböztetjük?

F.29 Egy 10 szögpontú fának 8 elsőfokú pontja van

a) Hányadfokú lehet a további két pont?

b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?

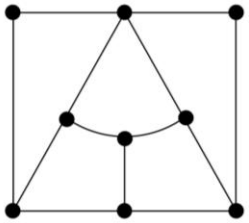
F.30 Hány pontja van annak a fának, amelyben az élek száma pontosan ötöde a fából „hiányzó” élek (vagyis az összekötetlen pontpárok) számának?

F.31 Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$. (*Megjegyzés*: Használjunk indirekt bizonyítási módszert!)

F.32 Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

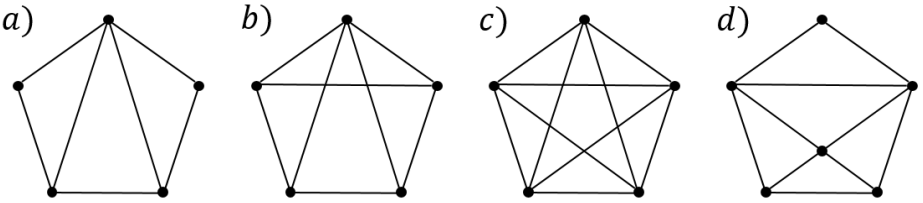
F.33 Miért nem lehet a fertődi Esterházy-kastély parkjában (ábra) egy olyan sétát tenni, amely során minden úton áthaladunk egyszer és az indulási helyre visszajutunk?





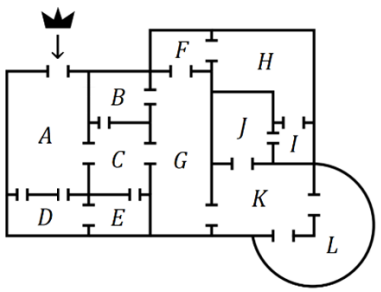
F.34 Van-e Euler-vonala (nyílt vagy zárt) az alábbi gráfoknak? Indokolja válaszát!

$a)$ $b)$ $c)$ $d)$



F.35 Rajzolja föl azt a gráfot, melynek a csúcsai az $A=\{1;2;3\}$ halmaz részhalmazai, és amelyben két csúcsot akkor köt össze él, ha a megfelelő részhalmazok közül az egyik tartalmazza a másikat! Van-e Euler-vonala (nyílt vagy zárt) ennek a gráfnak? Indokolja válaszát!

F.36 Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. Minden reggel a király belép a nyíllal jelölt bejáraton, majd úgy sétál a szobák közt, hogy minden ajtón pontosan egyszer megy át. Sétája végén leül a trónteremben és fogadja a látogatóit. Melyik terem a trónterem? Indokolja válaszát!



Felhasznált irodalom, források

- BOGYA NORBERT, KÁTAI-URBÁN KAMILLA (2017): *Gráfelmélet*
  http://www.math.u-szeged.hu/~nbogya/dimat1819II/3grafelmelet.pdf
  Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet, Szeged (Utolsó letöltés ideje: 2020. július. 25.)

- DR. GERŐCS LÁSZLÓ, SZÁMADÓ LÁSZLÓ (2012): *Matematika 11.*
  Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt, Budapest

- GÁBOS ADÉL, HALMOS MÁRIA (2005): *Készüljünk az érettségire matematikából*
  Műszaki Könyvkiadó, Budapest

- HAJNAL IMRE, SZÁMADÓ LÁSZLÓ, BÉKÉSSY SZILVIA (2003): *Matematika a gimnáziumok 11. évfolyama számára*
  Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

- JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA (2021): Matematika 10.
  Oktatási Hivatal, Budapest

- JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA, PARÓCZAY JÓZSEF, SZÁSZNÉ DR. SIMON JUDIT (2017): *Matematika 11. (Az érthető matematika)*
  Eszterházy Károly Egyetem Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Eger

- JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA, PARÓCZAY JÓZSEF, SZÁSZNÉ DR. SIMON JUDIT (2017): *Matematika 12. (Az érthető matematika)*
  Eszterházy Károly Egyetem Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Eger

- KOSZTOLÁNYI JÓZSEF, KOVÁCS ISTVÁN, PINTÉR KLÁRA, URBÁN JÁNOS, VINCZE ISTVÁN (2011): *Matematika tankönyv 9.*
  Mozaik Kiadó, Szeged

- OKTATÁSI HIVATAL (2020): *Központi írásbeli feladatsorok*
  https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok
  (Utolsó letöltés ideje: 2020. július. 25.)

- RÓKA SÁNDOR (2008): *Kombinatorika és gráfelmélet*
  http://zeus.nyf.hu/~mattan/faliujsag/komb.pdf
  Nyíregyházi Egyetem, Nyíregyháza (Utolsó letöltés ideje: 2020. július. 25.)

- TASSY GERGELY (2013): *Tehetséggondozás a matematikában: Kombinatorika, gráfok*
  https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/23.pdf
  Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Kar, Budapest (Utolsó letöltés ideje: 2020. július. 25.)