UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1972-73/1/1)
Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$K = \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}{1-\frac{a}{b}} + \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}}{1-\frac{b}{a}}.$$

(ESZÉV-NY 2009.05/1)
Egy 26 fős osztályban felmérték, hogy hetente átlagosan ki hány órát tölt otthoni tanulással. A felmérés eredményét a következő táblázat tartalmazza:

A tanulással töltött órák száma	3	4	5	6	7	8	9	10
A diákok száma	6	3	1	2	0	5	5	4

a) Számolja ki, hogy az osztályban egy diák hetente átlagosan hány órát tölt otthoni tanulással! Határozza meg az osztályban az otthoni tanulással töltött órák számának további középértékeit (*móduszát*, illetve *mediánját*) is!

b) Készítsen oszlopdiagramot a táblázat adataiból!

(AFGY II/2971/1)
Az alábbi egyenletnek a milyen értékeinél van negatív gyöke?

$$\frac{2a+x}{3} = \frac{5ax+1}{4}.$$

(EFFM 1992-94/48/2)
A p paraméter mely értékeire van az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke?

$$(p-1)x^2 + 2px + 3p - 2 = 0.$$

(EFFM 1974-76/10/2)
Az ABC háromszögben $a + c = 8\sqrt{3}$ cm, $m_a = 3$ cm és $ABC\sphericalangle = \beta = 60°$. Számítsa ki az $AC = b$ oldal hosszát!

(EFFM 1972-73/18/3)
Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{21}{\sqrt{2x+1}} - 2\sqrt{x} - \sqrt{2x+1} = 0.$$

(ESZÉV 2015.10/3)
Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\begin{cases} 2x = 12 - y; \\ 2\sqrt{x} = y. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3; \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0. \end{cases}$

Megoldások:

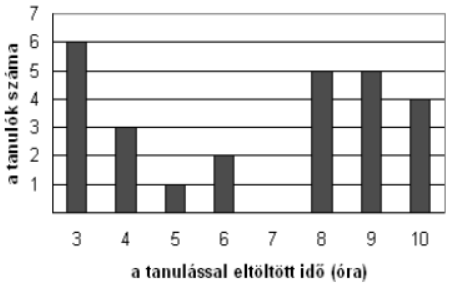
(EFFM 1972-73/1/1)

Kikötések: $a; b \neq 0$ és $a \neq b$. Használjuk fel az egyszerűsítés alatt, hogy $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}$. A kifejezés egyszerűsített alakja: $K = 1$.

(ESZÉV-NY 2009.05/1)

a) A keresett átlag: $\bar{x} = \frac{172}{26} \approx 6{,}6$ óra, a módusz (leggyakoribb elem): 3 óra, a medián (a rendezett elemsor középső eleme) pedig 8 óra.

b) A táblázat adataiból készített oszlopdiagram:



(AFGY II/2971/1)

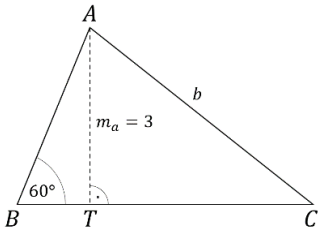
Az egyenlet átalakítva $x(15a - 4) = 8a - 3$. Ennek akkor van valós megoldása, ha $a \neq \frac{4}{15}$ (ellenkező esetben ellentmondást kapunk), és a megoldás $x = \frac{8a-3}{15a-4}$. A feltétel szerint az egyenlet megoldása negatív, azaz $\frac{8a-3}{15a-4} < 0$. Az egyenlőtlenséget megoldva $\frac{4}{15} < a < 0{,}375$.

(EFFM 1992-94/48/2)

$p \neq 1$, mert elsőfokú egyenletnek nem lehet két gyöke. Az egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa: $D > 0$, azaz $4p^2 - 4(p-1)(3p-2) > 0$, melyből a $-2p^2 + 5p - 2 > 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk. Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{2} < p < 2$. Két különböző valós gyöke tehát akkor lesz, ha $\frac{1}{2} < p < 2$ és $p \neq 1$.

(EFFM 1974-76/10/2)

ABT egy fél szabályos háromszög, melynek *AT* a magassága. Ezt felhasználva $c = 2\sqrt{3}$ cm, $BT = \sqrt{3}$ cm, és így $TC = 5\sqrt{3}$ cm. *ATC* derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel $b = 2\sqrt{21}$ cm.



(EFFM 1972-73/18/3)

Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $x \geq 0$. Szorozzuk meg az egyenletet az első tag nevezőjével, majd rendezést után a $\sqrt{2x^2 + x} = 10 - x$, négyzetre emelés és összevonás után az $x^2 + 21x - 100 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $x_1 = -25$ és $x_2 = 4$. A kezdeti kikötésnek csak az $x = 4$ felel meg és ez a gyök az eredeti egyenletet is kielégíti.

(EFFM 1974-76/27/3)

a) $x \neq 4$ miatt $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ gyökökből a megoldás $x = 0$.

b) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$, ami minden *x*-re teljesül. Az egyenlet $|x-2| = x - 2$ alakra hozható, melyből a keresett megoldás $x = 2$ vagy $x \geq 2$, azaz $x \geq 2$.

c) Az egyenlet azonosság, tehát minden valós szám megoldást ad.