UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1974-76/161/1)
Oldja meg a következő egyenletet!

$$(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1) + (x-1)^2 = 4x - x^2.$$

(ESZÉV 2010.10/1)
Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8.$$

(EFFM 1993-95/94.10/2)
Egy *ABCD* trapéz párhuzamos oldalainak hossza $AB = 20$ és $CD = 10$; továbbá $BC = AD$ és a trapéz átlói merőlegesek egymásra. Számítsa ki a trapéz szögeit és a másik két oldalának a nagyságát?

(EFFM 1966-85/56/3)
Egy gyárban a betanított és szakmunkások száma összesen 1440 fő. Az egyik jutalomosztásnál a betanított munkások 22,5%-a részesült jutalomban, a szakmunkásoknak pedig 18,75%-a, és így a munkásoknak összesen 20%-a kapott jutalmat. Hány betanított munkás és hány szakmunkás dolgozik a gyárban?

(ESZÉV-NY 2015.05/9)
Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az elsőt és a harmadikat.

a) Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

Összesen 30-an írták meg a dolgozatot. A dolgozatokat a tanár 1-től 5-ig terjedő egész osztályzatokkal értékelte. Az osztályzatok átlaga 3,4, mediánja 3,5, egyetlen módusza 4 volt. Amikor a tanár kiosztotta a dolgozatokat, a dolgozatírók közül hatan hiányoztak. A 24 kiosztott dolgozat között 7 db ötös, 5 db négyes, 6 db hármas, 4 db kettes és 2 db egyes volt.

b) Hányas lehetett a hat hiányzó tanuló dolgozata?

(ESZÉV-NY 2007.05/9)
Melyek azok az *N* kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre a következő négy állítás közül pontosan kettő igaz és kettő hamis:

a) Az *N* osztható 7-tel.
b) Az *N* a 29 többszöröse.
c) Az $N + 11$ négyzetszám.
d) Az $N - 13$ négyzetszám.

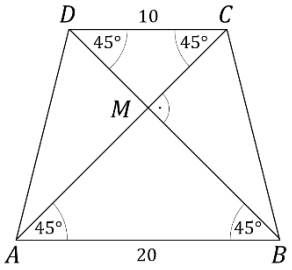
Megoldások:

(EFFM 1974-76/161/1)
Elvégezve a műveleteket a $4 = 4x - x^2$, rendezve az $x^2 - 4x + 4 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A bal oldalon teljes négyzet van, azaz $(x-2)^2 = 0$, melyből $x = 2$, ami kielégíti az eredeti egyenletet.

Megjegyzés: Észrevehető, hogy az egyenlet bal oldalán $x + 1$ és $x - 1$ különbségének a négyzete áll, azaz $[(x+1) - (x-1)]^2 = 4x - x^2$, vagyis $4 = 4x - x^2$.

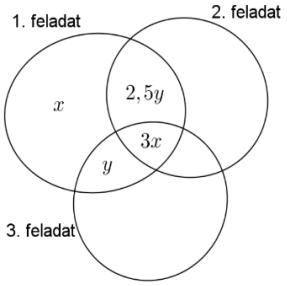
(ESZÉV 2010.10/1)
Elvégezve a köbreemeléseket, majd a lehetséges összevonásokat: $x^2 < 1$. Innen a $x \in]-1; 1[$.

(EFFM 1993-95/94.10/2)
A feltételek szerint a trapéz szimmetrikus. *CMD* és *AMB* (egyenlő szárú) derékszögű háromszögekből $MC = 5\sqrt{2}$ és $MB = 10\sqrt{2}$. A trapéz szárai az *MBC* háromszögből Pitagorasz-tétel szerint: $BC = \sqrt{250} \approx 15{,}81$ egység. Mivel $MBC\sphericalangle \approx 26{,}57°$, ezért a trapéz szögei: 71,57° és 108,43°.



(EFFM 1966-85/56/3)
Ha a betanított munkások száma *x*, akkor a szakmunkásoké $1440 - x$, és a feladat feltételei szerint $0{,}225x + 0{,}1875(1440 - x) = 0{,}2 \cdot 1440$. Innen 480 betanított és 960 szakmunkás volt az üzemben.

(ESZÉV-NY 2015.05/9)
a) Ha *x* jelöli a csak az első feladatot megoldók számát, akkor mindhárom feladatot megoldó tanulók száma 3*x*. A csak az első és a harmadik feladatot megoldók száma legyen *y*. Ekkor 2,5*y* azoknak a tanulóknak a száma, akik csak az első két feladatot oldották meg. A kapott adatokból: $4x + 3{,}5y = 22$ és $3x + 2{,}5y = 16$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 2$ és $y = 4$. Mindhárom feladatot tehát $3x = 6$ tanuló tudta megoldani.



b) Ha az osztályzatok átlaga 3,4, akkor összegük: $3{,}4 \cdot 30 = 102$. A hiányzó hat osztályzat összege tehát: $102 - (35 + 20 + 18 + 8 + 2) = 19$. Ha az osztályzatok mediánja 3,5, akkor a nagyság szerint sorrendbe állított osztályzatok között a két középső (a 15. és a 16. osztályzat) hármas és négyes. (Ha az osztályzatok módusza 4, akkor négyesből volt a legtöbb, tehát) a hiányzó osztályzatok között legalább 3 négyes volt. Több nem is lehetett, mert ezzel megvan a 15 hármasnál jobb osztályzat. A másik három hiányzó osztályzat tehát legfeljebb hármas, összegük pedig $19 - 12 = 7$. Két hármas nem lehetett köztük, mert akkor a 3 is módusz lenne, (és mindhárom nem lehet hármasnál rosszabb, így) az egyik hármas a másik kettő kettes. A hiányzó hat osztályzat tehát: 4, 4, 4, 3, 2, 2.

(ESZÉV-NY 2007.05/9)
Először adjuk meg elemeikkel a feladatban szereplő négy halmazt: $A = \{14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70; 77; 84; 91; 98\}$, $B = \{29; 58; 87\}$, $C = \{14; 25; 38; 53; 70; 89\}$ és $D = \{13; 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; 77; 94\}$. A feladat feltételeit pontosan azok az elemek elégítik ki, amelyek e négy halmaz közül kiválasztott kettő metszetében benne vannak, de nem elemei a másik két halmaz egyikének sem. Ezek a következő számok: 29; 38; 49; 70; 77.