UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1993-95/93.9/1)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}=\frac{x^2+1}{1-x^2}.$$

(ESZÉV 2015.05/2)
Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban (1 col ≈ 2,54 cm).

a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója, mint a másodiké?

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/2)
Az *A, B* és *C* kisvárosokban egészségügyi felmérést készítettek a felnőtt lakosság körében. Megállapították, hogy az *A* városban az átlagos testmagasság jó közelítéssel 168,2 cm, *B*-ben 167,9 cm és *C*-ben 167,2 cm. Az adatok elemzésekor kiderült, hogy az *A*-beli és *B*-beli lakókra együttesen kiszámolt átlagos testmagasság 168,0 cm, az *A* és a *C* város lakóié együttesen 167,8 cm. Megvizsgálták a *B* és a *C* város lakosainak eredményeit is, de sajnos az együttes átlagmagasságra vonatkozó adatok elkallódtak. Számítsa ki a három város összes felnőtt lakójának átlagos testmagasságát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegy pontossággal adja meg!

(ESZÉV 2005.10/4)
a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $f:[0;7]\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x^2-6x+5|$ függvényt!
b) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!

(EFFM 1974-76/59/4)
Oldja meg a következő egyenletet!

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{8-x}=\sqrt{x+2}.$$

(ESZÉV 2013.05/6)
Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya $5:7$. Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

Megoldások:

(EFFM 1993-95/93.9/1)

Az egyenlet értelmezhető, ha $x \neq \pm 1$. Az egyenlet az $x^2 - x + 1 - x^3 = -x^3 - x + x^2 + 1$ alakra hozható, ami azonosság. Így minden ± 1-től különböző valós szám megoldás lesz.

(ESZÉV 2015.05/2)

a) A képernyő oldalainak hosszát (cm-ben) jelölje $16x$ és $9x$. 40 col = 101,6 cm, így Pitagorasz-tétel szerint: $(16x)^2 + (9x)^2 = 101{,}6^2$. Ebből $x \approx 5{,}535$, így a képernyő oldalainak hossza: 88,6 és 49,8 cm.

b) Az első képernyő területe a második területének 1,69-szerese. A két (téglalap alakú) képernyő hasonló, ezért a területük aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő. A képernyők hasonlóságának (és így átlóik hosszának) aránya $\lambda = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$. Az első képernyő átlója 30%-kal nagyobb, mint a másodiké.

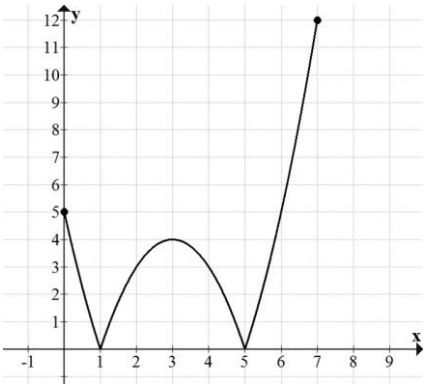
(ESZÉV Minta (2) 2015.10/2)

Jelölje *a*, *b*, *c* rendre a három kisváros felnőtt lakóinak számát. Ekkor az *A*, *B*, *C* városokban lakók testmagasságainak összege cm-ben mérve $168{,}2a$; $167{,}9b$ és $167{,}2c$. Az *A* és *B* lakók együttes testmagassága $\frac{168{,}2a+167{,}9b}{a+b} = 168{,}0$, ahonnan $b = 2a$. Az *A* és *C* lakók együttes testmagassága $\frac{168{,}2a+167{,}2c}{a+c} = 167{,}8$, ahonnan $c = \frac{2}{3}a$. Az összes lakó testmagassága: $\frac{168{,}2a+167{,}9b+167{,}2c}{a+b+c} = \frac{168{,}2a+167{,}9\cdot 2a+167{,}2\cdot\frac{2}{3}a}{a+2a+\frac{2}{3}a} \approx 167{,}9$.

(ESZÉV 2005.10/4)

a) $f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-3)^2 - 4|$.

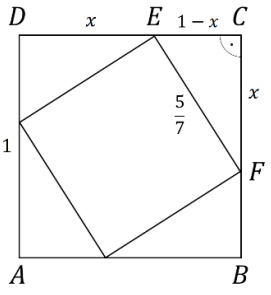
b) A függvény értékkészlete (a rajzról leolvasva): $[0; 12]$.



(EFFM 1974-76/59/4)

Az egyenlet értelmezési tartománya: $-2 \leq x \leq 3$. Mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk, melyből a $2\sqrt{x^2 - 11x + 24} = 3x - 9$ egyenletet kapjuk. Mivel a baloldal nemnegatív, ez az egyenlet csak akkor értelmezhető, ha a jobboldal is nemnegatív, azaz $x \geq 3$. A kezdeti egyenlet értelmezési tartományával ezt összevetve csak az $x = 3$ adhat megoldást, ami valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

(ESZÉV 2013.05/6)



A belső négyzet oldala $\frac{5}{7}$ méter. A belső négyzet a külső négyzet oldalait *x* és $1 - x$ hosszú szakaszokra bontja. Pitagorasz-tételt alkalmazva *EFC* derékszögű háromszögben: $x^2 + (1-x)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2$, ahonnan $2x^2 - 2x + \frac{24}{49} = 0$. Ennek megoldásai: $x_1 = \frac{4}{7}$ és $x_2 = \frac{3}{7}$, ahonnan $1 - x_1 = \frac{3}{7}$ és $1 - x_2 = \frac{4}{7}$. Azaz 3: 4 vagy 4: 3 a keresett arány.