UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1974-76/41/1)
Oldja meg a következő egyenletet!

$$x\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+\frac{1}{3}(x-2)(x+2)=\frac{1+(x-1)^3}{9}.$$

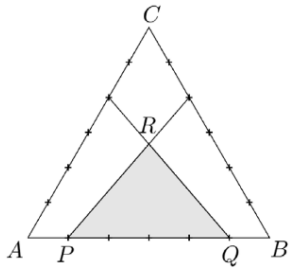
(AFGY II/2419/3)
A *k* milyen értékeinél van az alábbi egyenletnek egy gyöke (két egyenlő gyöke)?

$$2x^2+(k-9)x+k^2+3k+4=0.$$

(AFGY II/2800/3)
Mutassa meg, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása!

$$1000\cdot\sqrt[x]{0{,}1}=100^x.$$

(ESZÉV 2014.10/6)
Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget. Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét!



(ESZÉV-NY 2017.05/7)
Igazolja, hogy nincs olyan szabályos *n*-szög, amelynek a belső szögei *n* fokosak!

(ESZÉV 2016.10/7)
Adott a valós számok halmazán értelmezett *f* és *g* függvény:

$$f(x)=x^2-2 \quad \text{és} \quad g(x)=10+10x-x^2.$$

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x)+g(x)|\geq 8$ egyenlőtlenséget!
b) Igazolja, hogy a $[2;8]$ intervallumon az *f* és *g* függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

(ESZÉV Minta (2) 2004.05/8)
Bontsa fel az $n^{12}-n^8-n^4+1$ polinomot a lehető legalacsonyabb fokszámú polinomok szorzatára!

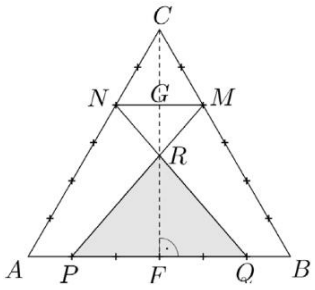
Megoldások:

(EFFM 1974-76/41/1)
Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \in \mathbf{R}$. Elvégezve a műveleteket az egyenlet egyszerűsített alakja: $6x = 12$, melyből $x = 2$.

(AFGY II/2419/3)
Az egyenletnek akkor lesz egy gyöke (két egyenlő gyöke), ha az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $(k-9)^2 - 8(k^2+3k+4) = 0$. Az egyenlet megoldásai: $k_1 = -7$ és $k_2 = 1$.

(AFGY II/2800/3)
Mivel *x* a gyökkitevőben szerepel, ezért $x \geq 2$ egész szám lehet csak. Az egyenlet átalakításokkal $10^{3-\frac{1}{x}} = 10^{2x}$ alakra hozható. Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért $3 - \frac{1}{x} = 2x$, melyből $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{1}{2}$. A kezdeti feltételeket figyelembe véve ezek a számok nem megoldásai az eredeti egyenletnek, melynek így tehát nincs megoldása.

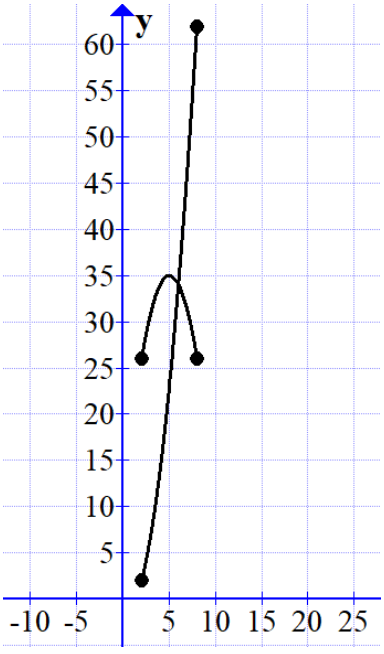
(ESZÉV 2014.10/6)
A *CNM* háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög, magassága $CG = \frac{1}{3}CF = 3\sqrt{3}$. A *PQMN* trapéz magassága: $6\sqrt{3}$. *PQR* háromszög hasonló az *MNR* háromszöghöz mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek), a hasonlóság aránya 2:1, így $FR = 4\sqrt{3}$. A *PQR* háromszög területe $\frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$.



(ESZÉV-NY 2017.05/7)
Egy ilyen *n* szög belső szögeinek összege fokban mérve n^2, így $n^2 = (n-2) \cdot 180°$, ahol $n \in \mathbf{N}$ és $n \geq 3$. Az egyenlet megoldásai nem egészek, tehát valóban nincs ilyen *n*-szög.

(ESZÉV 2016.10/7)
a) Megoldandó az $|10x + 8| \geq 8$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán. Az abszolútérték definíciója miatt $10x + 8 \geq 8$ vagy $10x + 8 \leq -8$. Innen $x \geq 0$ vagy $x \leq -1{,}6$.

b) Az *f* függvény minimumhelye $x = 0$, a $[2; 8]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, $f(2) = 2\ (> 0)$. A *g* függvény maximumhelye $x = 5$, az adott intervallumon felvett legkisebb értéke $g(2) = g(8) = 26\ (> 0)$. Így a függvények az adott intervallumon valóban csak pozitív értékeket vesznek fel. (*Megjegyzés*: grafikus indoklás is elfogadható. Lásd ábra!)



(ESZÉV Minta (2) 2004.05/8)
$n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = (n-1)^2(n+1)^2(n^2+1)^2(n^4+1)$.