UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1972-73/117/1)
Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$3x + 5y = 52;$$
$$2(5x - 1) + 3(4 - y) = 26.$$

Hány százaléka az $x + y$ az $x^2 + y^2$-nek, ha *x* és *y* az egyenletrendszer megoldása?

(AFGY II/2008/2)
Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\left(\sqrt{a} + \frac{b - \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{ab} + b} + \frac{b}{\sqrt{ab} - a} - \frac{a + b}{\sqrt{ab}}\right).$$

(ESZÉV 2016.10/3)
Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt *p* euróval felemelték, majd a múlt héten *p* százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett. Határozza meg *p* értékét!

(EFFM 1993-95/93.11/3)
Két koncentrikus kör középpontjától 15 egységre lévő szelő a kisebb körből akkora húrt metsz ki, amelyik $\frac{2}{5}$ része a nagyobb körből kimetszett húrnak. Mekkora a két kör sugara, ha az egyik 8 egységgel nagyobb, mint a másik?

(EFFM 1972-73/115/7)
Számítsa ki az alábbi egyenletben a *p* paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege a legkisebb legyen!

$$x^2 + (2 - p)x - p - 3 = 0.$$

(ESZÉV 2005.10/8)

a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hány tanulója van az osztálynak?

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzéses asztalitenisz-bajnokságot játszott. (A tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott!

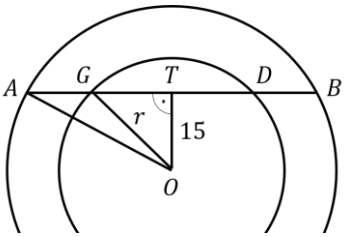
c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm. Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát!

Megoldások:

(EFFM 1972-73/117/1)
Az egyenletrendszer megoldása $(4; 8)$ valós számpár. Az $x + y = 12$ érték az $x^2 + y^2 = 80$ értéknek a $\frac{12}{80} \cdot 100 = 15$ százaléka.

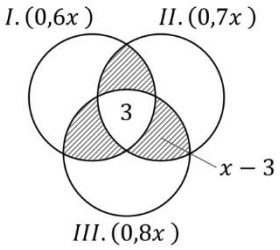
(AFGY II/2008/2)
A kifejezés értelmezési tartománya az $a > 0$, $b > 0$ és $a \neq b$ valós számok halmaza. A kifejezés egyszerűsített alakja: $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.

(ESZÉV 2016.10/3)
A feltétel szerint: $(209 + p)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 189$, melyből $p^2 + 109p - 2000 = 0$. A másodfokú egyenlet két gyöke $p = -125$ és $p = 16$. A negatív gyök nem felel meg a feladat szövegének, azaz $p = 16$.

(EFFM 1993-95/93.11/3)


Legyen $AB = x$, ekkor $AT = \frac{x}{2}$, továbbá a feltétel miatt $GT = \frac{x}{5}$. Az *ATO* és *GTO* derékszögű háromszögekben Pitagorasz-tételt alkalmazva: $(r + 8)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 15^2$, illetve $r^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 + 15^2$. A két egyenlet megfelelő oldalainak kivonásából adódó $16r + 64 = \frac{21}{100}x^2$ egyenletből az x^2-et kifejezve, majd az első egyenletbe behelyettesítve a $21r^2 - 64r - 4981 = 0$ egyenletet kapjuk. Mivel $r > 0$, ezért a kapott két gyökből az $r = 17$ megoldása csak a feladatnak. A nagyobbik kör sugara így 25 egység lesz.

(EFFM 1972-73/115/7)
Az adott egyenletnek valóban két különböző valós gyöke van, mert a diszkriminánsa pozitív, ugyanis $D = (2 - p)^2 + 4(p + 3) = p^2 + 16 > 0$. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján: $x_1 + x_2 = -(2 - p)$ és $x_1 x_2 = -p - 3$. A gyökök négyzetösszege az előzőek felhasználásával: ${x_1}^2 + {x_2}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (p - 1)^2 + 9$. A gyökök négyzetösszege akkor a legkisebb, amikor $p - 1 = 0$, azaz $p = 1$.

(ESZÉV 2005.10/8)


a) Ha az osztály létszáma *x*, akkor feladat feltételei szerint az első kiránduláson $0{,}6x$, a másodikon $0{,}7x$, a harmadikon $0{,}8x$ tanuló volt. Pontosan három kiránduláson 3, pontosan két kiránduláson pedig $x - 3$ tanuló vett részt. A logikai szita elve alapján felírható: $x = 0{,}6x + 0{,}7x + 0{,}8x - (x - 3 + 3 \cdot 3) + 3$, melyből az osztálylétszám $x = 30$.

b) Ha minden tanuló legfeljebb két mérkőzést játszott volna, akkor eddig 10 mérkőzés zajlott volna le. Mivel 11 mérkőzés volt, ezért a *skatulya-elv* alapján lennie kell olyan tanulónak, aki három mérkőzést játszott.

c) A második kiránduláson 21 tanuló volt. Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát $\overline{h}$, ekkor $174{,}3 = \frac{21 \cdot \overline{h} + 9 \cdot 182}{30}$, melyből $\overline{h} = 171$ cm.