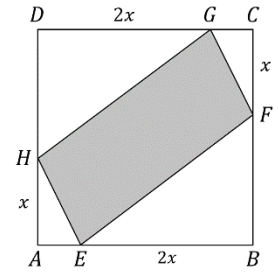
UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2008.10/1)
Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

$a)$ $(x-2)\cdot \lg(x^2-8)=0$. $\qquad$ $b)$ $x^2-|x|=6$.

(ESZÉV 2019.05/1)
Az *ABCD* négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az *EFGH* paralelogrammát írjuk. Az *AH* és a *CF* szakasz hossza *x* méter, a *BE* és a *DG* szakasz hossza $2x$ méter $(0<x<2)$.



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2-ben mérve): $T(x)=4x^2-12x+16$.
b) Határozza meg az *x* értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!
c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x=1{,}25$.

(ESZÉV 2012.10/2)
Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

(ESZÉV 2020.10/2)
Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év. Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi?

(EFFM 1972-73/56/4)
Oldja meg a következő egyenletet!

$$4\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^{x+1}-25=0.$$

(ESZÉV 2005.05/6)
Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x)=(p-3{,}5)x^2+2(p-2)x+6$ függvényt, ahol *p* tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges *p* érték mellett az $x=-2$ zérushelye a függvénynek!
b) Milyen *p* értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

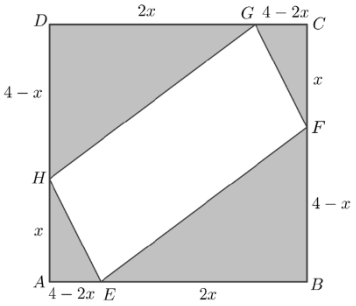
Megoldások:

(ESZÉV 2008.10/1)

a) Értelmezési tartomány: $x < -2\sqrt{2}$ vagy $x > 2\sqrt{2}$. Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0, azaz $x - 2 = 0$, vagy $\lg(x^2 - 8) = 0$. Innen $M = \{-3; 3\}$.

b) Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlet $x^2 - x - 6 = 0$, ha $x < 0$, akkor az egyenlet $x^2 + x - 6 = 0$. Innen $M = \{-3; 3\}$.

(ESZÉV 2019.05/1)



a) A paralelogramma területét megkapjuk, ha az *ABCD* négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét. $T(x) = 16 - 2 \cdot \frac{x(4-2x)}{2} - 2 \cdot \frac{2x(4-x)}{2} = 4x^2 - 12x + 16$.

b) $T(x) = 4(x - 1{,}5)^2 + 7$. A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért a függvénynek minimuma van az $x = 1{,}5$ helyen (ami megfelel a $0 < x < 2$ feltételnek).

c) (A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei pedig kiegészítő szögek, ezért) a paralelogramma szögei: 87,5°, 92,5°, 87,5°, 92,5°.

(ESZÉV 2012.10/2)

Jelölje *x* azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, *y* pedig a másikat. A feltételek szerint az $x + y = 29$ és az $(x - 15)(y + 15) = 5xy$ egyenletek írhatóak fel. A két egyenletből (egyszerűsítés után) a $2x^2 - 43x - 330 = 0$ egyenlet adódik, melynek megoldásai az $x_1 = -6$ és az $x_2 = 27{,}5$. Innen a keresett számpárok: –6 és 35 vagy 27,5 és 1,5.

(ESZÉV 2020.10/2)

Ha a résztvevők száma *x*, akkor az életkoruk összege $28x$. Az öt legidősebb nélkül a csoport tagjai életkorának összege $25{,}6(x - 5)$, az öt legidősebb életkorának összege pedig $5 \cdot 40$. A feltétel szerint: $\frac{25{,}6(x-5)+5\cdot 40}{x} = 28$, melyből $x = 30$. Mivel $30 : 2{,}5 = 12$, ezért 12 férfi és 18 nő vett részt a képzésen.

(EFFM 1972-73/56/4)

Mivel $5^{2x} = (5^x)^2$, ezért az egyenlet 5^x-re másodfokú egyenlet: $4 \cdot 5^{2x} - 15 \cdot 5^x - 25 = 0$, melynek megoldásai az $5^x = 5$, illetve $5^x = -\frac{5}{4}$. Mivel $5^x > 0$, ezért csak az első eset ad megoldást, ami $x = 1$. Ellenőrzéssel az $x = 1$ valóban gyöke az eredeti egyenletnek.

(ESZÉV 2005.05/6)

a) Behelyettesítve a -2 értéket, 0-t kapunk, azaz nem függ *p* megválasztásától.

b) $p \neq 3{,}5$, mert ekkor nem lenne másodfokú egyenlet, azaz nem lenne két gyök. Az egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{-3}{p-3{,}5}$ és $x_2 = -2$. A feltétel szerint a $\frac{-3}{p-3{,}5} > 1$ egyenlőtlenséget kell megoldani, melyből a keresett megoldás: $0{,}5 < p < 3{,}5$.