UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2006.10/1)
Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2.$

b) $2^x = 3^{2x+1}.$

(ESZÉV 2016.10/1)
Legyen az *x* pozitív valós szám.

a) Határozza meg *x* értékét úgy, hogy a 27 és az *x* számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás: „*Ha* $x > 27$*, akkor a 27-nek és az x-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél*.” Válaszát indokolja!

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

(EFFM 1999-01/99.2/2)
Egy paralelogramma átlóinak hossza 30 egység és 16 egység, területe 240 területegység. Mekkorák a paralelogramma oldalai és szögei?

(ESZÉV 2013.10/2)
Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méteres árnyékot vet. Ugyanekkor a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?

(ESZÉV 2018.05/3)
Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson. Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

(ESZÉV 2013.10/3)
Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a $\{0; 1; 2\}$ halmaznak.

a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32?

b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04?

c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62?

(EFFM 1996-98/97.37/5)

a) Ábrázolja a $[-3; 5]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényt, ha

$$f(x) = \big||x-1|-2\big|-1.$$

b) Jellemezze a függvényt a következő szempontok szerint: értelmezési tartomány, zérushely, szélsőérték hely és szélsőérték, korlátosság, monotonitás, paritás, értékkészlet!

Megoldások:

(ESZÉV 2006.10/1)

a) Kikötés: $x > -\frac{1}{3}$, az egyenlet megoldása $x = 3$. *b)* Rendezéssel $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{1}{3}$, innen az egyenlet megoldása $x = \log_{\frac{9}{2}} \frac{1}{3} \approx -0{,}7304$.

(ESZÉV 2016.10/1)

a) Az $\frac{x+27}{2} = \sqrt{27x} + 6$ egyenletből $x = 3$ és $x = 75$. Mindkét szám megfelelő lesz.

b) Igaz, mert két különböző pozitív szám mértani közepe kisebb a számtani közepüknél.

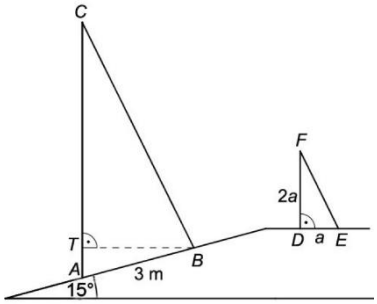
c) „*Ha az x-nek és a 27-nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél, akkor* $x > 27$”. Az állítás hamis. Ellenpélda bármelyik 27-nél kisebb pozitív valós szám.

(EFFM 1999-01/99.2/2)

Négy háromszögre bontva, a paralelogramma területe $t = 4 \cdot \frac{\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\sin\varphi}{2} = \frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}$, ahol φ az átlók szöge. Itt felhasználtuk, hogy $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$. Innen $\varphi = 90°$, azaz rombuszról van szó. A keresett adatok: $a = 17$ egység, $\alpha \approx 56{,}14°$ és $\beta \approx 123{,}86°$.

(ESZÉV 2013.10/2)

Az ábra szerint az *ABT* szög szintén 15°. Az *ABT* derékszögű háromszögből $AT \approx 0{,}78$ (m). A *BT* távolság Pitagorasz-tétellel: $BT \approx 2{,}9$ (m). A *CTB* háromszög hasonló az *FDE* háromszöghöz (mivel oldalaik páronként párhuzamosak, így megfelelő szögeik megegyeznek). Innen $\frac{BT}{CT} = \frac{1}{2}$, melyből $CT \approx 5{,}8$ (m). Így a fa teljes magassága: $AT + CT \approx 6{,}6$ (m).



(ESZÉV 2018.05/3)

Ha az osztálylétszám *n* fő, az egy tanulóra jutó szállásköltség pedig (*n* résztvevő esetén) *x* Ft, akkor $nx = (n-1)(x+120)$ és $nx = (n-2)(x+250)$. Az egyenletrendszer megoldása: $n = 26$ (tehát az osztálylétszám 26 fő), és $x = 3000$. A fizetendő teljes szállásdíj: $nx = 26 \cdot 3000 = 78\,000$ Ft.

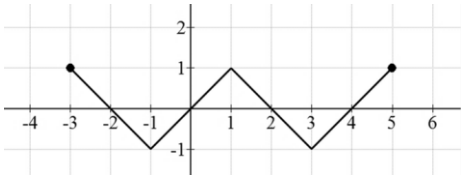
(ESZÉV 2013.10/3)

a) Ha az 50 adat átlaga 0,32, akkor összegük $50 \cdot 0{,}32 = 16$. Mivel az adatsokaság minden adata nemnegatív, legfeljebb 8 darab 2-es lehet az 50 adat között. (8 darab 2-es és 42 darab 0 esetén valóban 0,32 az átlag.)

b) Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0, azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és a 26. szám (és így az első 24 szám) is 0. Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1 vagy 2. Az 50 szám összege tehát legfeljebb 48 lehet, az elérhető legnagyobb átlag pedig 0,96. Mivel ez kisebb, mint 1,04, ellentmondás, azaz nem lehet a medián 0.

c) Például 31 darab 1 és 19 darab 0 esetén 0,62 az átlag, valamint 1 az egyetlen módusz, tehát lehet az 50 adat módusza az 1.

(EFFM 1996-98/97.37/5)



ÉT $\in [-3; 5]$, ÉK $\in [-1; 1]$. A függvény zérushelyei: $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$. Maximuma az $x \in \{-3; 1; 5\}$ helyeken az $y = 1$, minimuma az $x \in \{-1; 3\}$ helyeken az $y = -1$. A függvény korlátos, pontos aló korlátja a -1, pontos felső korlátja az 1. Szigorúan monoton csökkenő a $[-3; -1]$, $[1; 3]$ intervallumokban, szigorúan monoton növekedő a $[-1; 1]$, $[3; 5]$ intervallumokban. A függvény se nem páros, se nem páratlan.