UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2009.05/2)
Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:

166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159.

Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

(EFFM 1996-98/96.3/3)
Mely valós *x* számok elégítik ki a következő két egyenletet?

$a)$ $\frac{9^x}{4^x}+\frac{4^x}{9^x}=\frac{13}{6}$.

$b)$ $\frac{2x^2+4}{3x+2}+\frac{3x+2}{2x^2+4}=\frac{13}{6}$.

(ESZÉV 2006.05/3)
Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol *x* és *y* valós számok!

$$\begin{cases} 10^y = x-3; \\ \lg(x^2-4x+3)=2y+1. \end{cases}$$

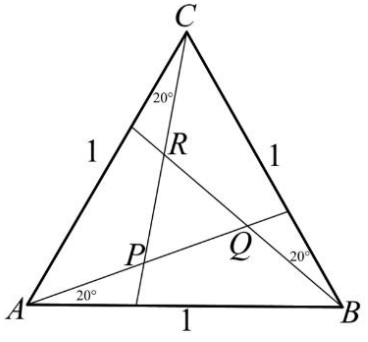
(EFFM 1999-01/01.12/4)
Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{3^x}{3^{\sqrt{x-2}}}=\frac{3^{3+\sqrt{x-2}}}{3^x}+6.$$

(EFFM 1992-94/99/5)
Az alábbi egyenlet egyik gyöke a másik gyökének háromszorosa. Számítsa ki az *m* értékét és az egyenlet gyökeit!

$$x^2+mx+m-1=0.$$

(ESZÉV 2017.05/8)
Az egységnyi oldalú *ABC* szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható *PQR* szabályos háromszöget kaptuk. Számítsa ki a *PQR* háromszög oldalának hosszát!



Megoldások:

(ESZÉV 2009.05/2)

A lányok testmagasságának átlaga: $\frac{2624}{16} = 164$ (cm). Az osztály tanulóinak átlagmagasságát a 16 lány átlagmagassága ($\bar{l}$) és a 14 fiú átlagmagassága ($\bar{f}$) segítségével számíthatjuk ki: $\bar{x} = \frac{16\cdot\bar{l}+14\cdot\bar{f}}{30} = \frac{16\cdot164+14\cdot172{,}5}{30} = \frac{5039}{30} \approx 168{,}0$. (A feladat utasítása szerint az eredményben fontos a tized kiírása!)

(ESZÉV 2006.05/3)

Az első egyenlet alapján *y* tetszőleges és $x > 3$. A második egyenlet alapján *y* tetszőleges és $x > 3$ vagy $x < 1$. Az egyenletrendszer gyökeit tehát az $y \in \mathbf{R}$ és $x > 3$ feltétel mellett keressük. Az első egyenletből $y = \lg(x-3)$, amit a másodikba helyettesítve (a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt) az $x^2 - 4x + 3 = 10(x-3)^2$ egyenlet adódik. Innen $x = 3$, ami nem ad megoldást, vagy $x = \frac{29}{9} \approx 3{,}2$. Ezt visszahelyettesítve: $y = \lg\frac{2}{9} \approx -0{,}653$. A kapott $(x; y)$ számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert is, tehát megoldás.

(EFFM 1996-98/96.3/3)

a) Az egyenlet minden valós *x*-re értelmezve van. Az egyenlet megoldásai $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = \frac{1}{2}$.

b) Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = -\frac{2}{3}$. Az egyenlet gyökei $x_1 = \frac{1}{4}$ és $x_{12} = 2$.

(*Megjegyzés*: Vegyük észre, hogy mindkét egyenlet $a + \frac{1}{a} = \frac{13}{6}$ alakú.)

(EFFM 1999-01/01.12/4)

A négyzetgyök miatt $x \geq 2$. Vezessük be a $\frac{3^x}{3^{\sqrt{x-2}}} = a$ új változót, ekkor a $a - 27 \cdot \frac{1}{a} = 6$ egyenletet kapjuk. Ennek $a = 9$ megoldását visszahelyettesítve $x_1 = 2$ vagy $x_2 = 3$.

(EFFM 1992-94/99/5)

A feltétel szerint $x_2 = 3x_1$, továbbá a gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $x_1 + x_2 = -m$ és $x_1x_2 = m - 1$. A három egyenletből a $3m^2 - 16m + 16 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai: $m_1 = 4$ vagy $m_1 = \frac{4}{3}$. Ezeket visszahelyettesítve a megadott egyenletbe az $x_1 = -1$ és $x_2 = -3$ vagy $x_1 = -\frac{1}{3}$ és $x_2 = -1$ gyököket kapjuk, és ezek mind kielégítik a feladat feltételeit.

(ESZÉV 2017.05/8)

Az *ABQ* háromszög szögei 20°, 40° és 120°. Az *ABQ* háromszögből szinusztétellel: $\frac{BQ}{1} = \frac{\sin 20°}{\sin 120°}$, ahonnan $BQ \approx 0{,}395$. $\frac{AQ}{1} = \frac{\sin 40°}{\sin 120°}$, ahonnan $AQ \approx 0{,}742$. $BQ = AP$ (mert az ábra forgásszimmetrikus), így $PQ = AQ - AP \approx 0{,}347$.

