UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1986-95/2/2)
Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

(ESZÉV 2018.05/4)
Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot!

A 72-nek és az *n* pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720.

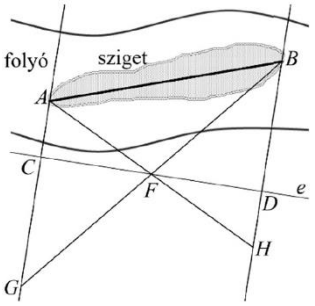
b) Határozza meg az *n* lehetséges értékeinek számát, és adja meg az *n* legkisebb lehetséges értékét!

(EFFM 1992-94/5/5)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$(x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 0.$

(ESZÉV Minta (3) 2015.10/6)
a) Egy templom nagyméretű toronyóráján a kismutató 56 cm, a nagymutató 92 cm hosszú. Mekkora a mutatók végpontjainak távolsága 6 óra 10 perckor?

b) Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja! „Ha az *ABC* háromszögben $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, akkor a háromszög egyenlő szárú.” (α és β a háromszög *A*, illetve *C* csúcsánál lévő szögét jelöli.)

(ESZÉV 2018.10/7)


Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget *AB* hosszát a folyóparton maradva határozta meg.

Először felvett egy *e* egyenest a parton. Ezen az *e* egyenesen megkereste azt a *C*, illetve *D* pontot, amelyekben a *CA*, illetve a *DB* irány merőleges az *e* egyenesre. Ezután a *CD* szakasz *F* felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az *AC* egyenesen haladva megjelölte azt a *G* pontot, amelyre *B*, *F* és *G* egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az *AF* és *BD* egyenesek *H* metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a *GH* távolsággal egyezik meg. Igazolja Thalész állításának helyességét!

Megoldások:

(EFFM 1986-95/2/2)
Két esetet kell megkülönböztetni: ha $x+3 \geq 0$, akkor $|x+3| = x+3$, illetve, ha $x+3 < 0$, akkor $|x+3| = -(x+3)$. Innen a keresett megoldáshalmaz: $M = \{-3; -1\}$.

(ESZÉV 2018.05/4)

a) Az adatok száma páratlan, ezért a medián (a 72) szerepel az adatok között. A hét adat között a 71 és a 75 pontosan kétszer szerepel (egynél többször kell előfordulniuk, de ha háromszor szerepelnének, akkor a terjedelem 4 lenne). A hét adat összege 511, a hiányzó két adat összege így 147. A terjedelem miatt a legkisebb adat legalább 68, a legnagyobb legfeljebb 78. Ezt figyelembe véve a 147 lehetséges felbontásai közül a terjedelem miatt csak a $70 + 77$ felel meg. Így a hét szám: 70, 71, 71, 72, 75, 75, 77.

b) A legkisebb közös többszörös definíciója miatt $n = 2^k \cdot 3^m \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, ahol $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ és $m \in \{0; 1; 2\}$. Az *n* lehetséges értékeinek a száma tehát $4 \cdot 3 = 12$, legkisebb értéke pedig a 385.

(EFFM 1992-94/5/5)
Mivel $x^2 - 2x + 3 > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re, ezért a négyzetgyök értéke biztosan pozitív. Így a szorzat értéke akkor lesz nemnegatív, ha az első tényező nemnegatív, azaz ha $x + 2 \geq 0$. Innen $x \geq -2$.

(ESZÉV Minta (3) 2015.10/6)

a) A nagymutató a számlap 12-es pozíciójához képest $60°$-ot, a kismutató $185°$-ot fordult el. A két mutató által bezárt szög így $125°$. Koszinusztételt felírva $d^2 = 92^2 + 56^2 - 2 \cdot 92 \cdot 56 \cdot \cos 125°$, innen $d \approx 132{,}3$ cm a mutatók végpontjainak távolsága.

b) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(2\beta)$. Az egyenlet akkor teljesül, ha $\alpha = \beta$ ($+k \cdot 360°$, $k \in \mathbf{Z}$.) vagy $2\alpha = 180° - \beta$ ($+l \cdot 360°$, $l \in \mathbf{Z}$.), azaz $\alpha + \beta = 90°$ (és ekkor $\gamma = 90°$). Az állítás tehát nem igaz, hiszen α és β pótszögek is lehetnek egy nem egyenlő szárú derékszögű háromszögben.

(ESZÉV 2018.10/7)
$GCF\triangle \cong BDF\triangle$, mert $CF = FD$, és egyenlők a *CF*, illetve *FD* oldalukon fekvő szögeik is. Hasonlóan $ACF\triangle \cong HDF\triangle$ (mert $CF = FD$, és egyenlők a *CF*, illetve *FD* oldalukon fekvő szögeik is). Az előzőek miatt $AF = FH$ és $BF = FG$, vagyis az *ABHG* négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást. Az *ABHG* négyszög tehát paralelogramma, ezért $AB = HG$, azaz az állítás valóban igaz.

Második megoldás:

Tükrözzük az ábrát az *F* pontra. Ekkor az *AG* és a *BH* egyenes egymás tükörképei lesznek (hiszen *C* és *D* egymás tükörképei, és mindkét egyenes merőleges a *CD* szakaszra). Ebből következik, hogy *A* és *H*, illetve *B* és *G* egymás tükörképei, vagyis az *AGHB* négyszög középpontosan szimmetrikus (paralelogramma). Az *AB* szakasz tükörképe a *HG* szakasz (ezért egyenlő hosszúak), Thalész állítása tehát valóban igaz.

