UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2017.05/1)
Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

$a)$ $\lg x < 2.$ $b)$ $4x < 5 - x^2.$ $c)$ $0{,}5^{|x-3|} < 0{,}25.$

(ESZÉV 2008.05/2)
Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3} = 2.$$

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/5)
Egy korábbi munkából megmaradt, háromszög alakú bútorlap oldalainak közelítő méretei: 200 cm, 120 cm és 160 cm. A bútorlapból egy félkör alakú asztallapot vágnak ki a műhelyben úgy, hogy a félkör átmérője a leghosszabb oldalra illeszkedik.

a) Legfeljebb mekkora lehet az így kapott félkör alakú asztallap sugara? Válaszát egész centiméter pontossággal adja meg!

Az *O* középpontú kör sugara $r = 5$ cm. Felveszünk egy körön kívüli *P* pontot úgy, hogy $OP = 13$ cm, és a *P* ponton át húzott *e* egyenessel elmetsszük a kört. A *P*-hez közelebbi metszéspontot jelölje *A*, a *P*-től távolabbit *B*.

b) Mekkora az *O* pont és az *e* egyenes távolsága, ha $PA = 10$ cm?

(EFFM 1996-98/98.29/5)
Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$$x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} \leq 17.$$

(ESZÉV 2020.05/8)
Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie. A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg. Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük. Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?

(ESZÉV-NY 2019.05/8)
Ádám és Misi szeretnék kerékpárral egy nap alatt megkerülni a Balatont. A tó körüli kerékpárút hossza 205 km. Reggel 7-kor indulnak. Mikor ebédszünetet tartanak, megállapítják, hogy átlagsebességük az ebédszünetig 16 km/h volt. A 60 perces ebédszünet után továbbindulnak. Hogy még aznap célba érjenek, átlagsebességüket 20 km/h-ra növelik a hátralevő úton. Így valóban visszaérnek a kiindulási pontjukra este fél 8-ra. Mikor tartottak a fiúk ebédszünetet?

Megoldások:

(ESZÉV-NY 2017.05/1)

a) A lg függvény szigorú monoton növekedő, ezért $x < 100$. Az értelmezési tartomány miatt $x > 0$. Tehát $0 < x < 100$.

b) Nullára rendezve: $x^2 + 4x - 5 < 0$, zérushelyek -5 és 1. Mivel a négyzetes tag együtthatója pozitív, ezért $-5 < x < 1$.

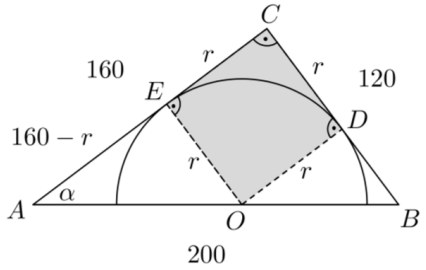
c) $0{,}5^{|x-3|} < 0{,}5^2$. A 0,5 alapú exponenciális függvény szigorú monoton csökkenő, így $|x-3| > 2$, melyből $x < 1$ vagy $x > 5$.

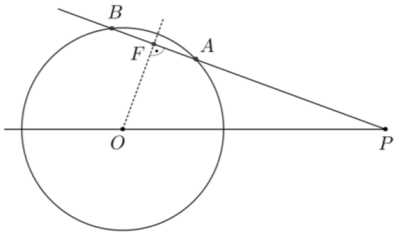
(ESZÉV 2008.05/2)

A megoldást csakis az $x^2 \geq 3$, azaz $x \leq -\sqrt{3}$ vagy $x \geq \sqrt{3}$ feltételnél kereshetjük. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd rendezve: $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)} = 3 - x^2$. A baloldal nemnegatív, így a jobboldal is nemnegatív, ezért $x^2 \leq 3$ feltételnek is fenn kell állnia. A kezdeti feltétellel összevetve, az $x^2 = 3$ teljesülhet csak. Ezt az értéket az eredeti egyenletbe behelyettesítve adódik, hogy az $x^2 = 3$ kielégíti az egyenletet. Innen a két gyök $x_1 = -\sqrt{3}$ és $x_2 = \sqrt{3}$.

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/5)

a) A maximális sugarú félkör érinti az *AC* és *BC* oldalakat. Mivel $200^2 = 120^2 + 160^2$, ezért Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű. *CEOD* négyzet, mert három derékszöge van és $OE = OD$. *AEO* és *ACB* hasonló háromszögekből $\frac{120}{160} = \frac{r}{160-r}$, innen $r \approx 68{,}57$. Az asztallap sugara (az előírt pontossággal) 68 cm.





b) Meghatározandó az *OF* szakasz hossza. *OPA* háromszögben koszinusztételt felírva: $OA^2 = OP^2 + PA^2 - 2 \cdot OP \cdot PA \cdot \cos\varphi$, innen $\varphi \approx 20{,}2°$. Az *OPF* derékszögű háromszögben $\sin\varphi = \frac{OF}{OP}$, melyből $OF \approx 4{,}49$ cm (a keresett távolság).

(EFFM 1996-98/98.29/5)

Az egyenlőtlenség $x > 0$-ra értelmezett. Célszerű az $x^{\log_2 x} = a$ $(a > 0)$ helyettesítés. Ekkor az egyenlet $a^2 - 17a + 16 \leq 0$ alakú. Innen $1 \leq a \leq 16$, melyből $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

(ESZÉV 2020.05/8)

Legyen az elfogyasztott ételek nettó ára *x* Ft, az italoké pedig *y* Ft. Ekkor $1{,}3x + 1{,}04y = 8710$ és $1{,}04x + 1{,}3y = 7670$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 5500$ és $y = 1500$, azaz a bruttó ételfogyasztás $5500 \cdot 1{,}04 = 5720$ Ft, a bruttó italfogyasztás $1500 \cdot 1{,}3 = 1950$ Ft volt. Ellenőrzés: A helyesen kiállított számlán bruttó $5500 \cdot 1{,}04 + 1500 \cdot 1{,}3 = 7670$ Ft, a tévesen kiállított számlán pedig bruttó $5500 \cdot 1{,}3 + 1500 \cdot 1{,}04 = 8710$ Ft szerepelt valóban.

(ESZÉV-NY 2019.05/8)

Ebédszünet nélkül összesen 11,5 óráig voltak úton a kerékpárosok. Ha *t* jelöli (órában mérve) az ebédszünetig eltelt időt, akkor az ebédszünet után $11{,}5 - t$ órát kerékpároztak. Ebédszünet előtt $16t$ kilométert, ebédszünet után $20(11{,}5 - t)$ kilométert haladtak. A teljes megtett útjuk $16t + 20(11{,}5 - t) = 205$, melyből $t = 6{,}25$ (óra). $7 + 6{,}25 = 13{,}25$, azaz az ebédszünetet negyed 2-től negyed 3-ig tartották.