UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1992-94/101/1)
A p valós paraméter mely értékei esetén van valós megoldása az alábbi egyenletnek?

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x(x-1)} = 2\sin\frac{p\pi}{2}.$$

(ESZÉV 2011.05/3)
Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámnak az aránya $\frac{11}{8}$-szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között. Hány felnőtt és hány diák tagja van a sportklubnak?

(EFFM 1992-94/3/3)
Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét számológép és közelítő értékek használata nélkül, ha $\operatorname{tg}\alpha = 2$ és $0° < \alpha < 180°$!

$a)$ $\dfrac{1 + \sin(2\alpha)}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$. $\qquad$ $b)$ $\dfrac{1 - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}$.

(ESZÉV 2011.10/4)
Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x, y > 0$ és $x, y \neq 1$!

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2; \\ \sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1. \end{cases}$$

(ESZÉV 2015.05/4)
Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16; 10)$, $B(2; 4)$ és $C(10; 2)$.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög *B* csúcsánál fekvő belső szögét!
b) A *K* pont egyenlő távolságra van *A*-tól, *B*-től és *C*-től. Határozza meg a *K* pont koordinátáit!

(ESZÉV 2009.05/8)
A *K* középpontú és *R* sugarú kört kívülről érinti az *O* középpontú és r sugarú kör ($R > r$). A *KO* egyenes a nagy kört *A* és *E*, a kis kört *E* és *D* pontokban metszi. Forgassuk el a *KO* egyenest az *E* pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az *E*-től különböző *B* pontban, a kis kört *C* pontban metszi.

a) Készítsen ábrát! Igazolja, hogy az *ABDC* négyszög trapéz!
b) Igazolja, hogy az *ABC* háromszög területe $t = R \cdot (R + r) \cdot \sin 2\alpha$!
c) Mekkora α szögnél lesz az *ABC* háromszög területe maximális, adott *R* és r esetén?

Megoldások:

(EFFM 1992-94/101/1)

Az egyenlet $x+\frac{1}{x}=2\sin\frac{p\pi}{2}$ alakra hozható $(x\neq 0;1)$. Innen $x^2-\left(2\sin\frac{p\pi}{2}\right)x+1=0$, melynek akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa, $4\sin^2\frac{p\pi}{2}-4\geq 0$. Ebből $\sin^2\frac{p\pi}{2}\geq 1$, ami csak akkor lehet, ha $\left|\sin\frac{p\pi}{2}\right|=1$. A kikötés miatt csak a $\sin\frac{p\pi}{2}=-1$ ad megoldást. Innen $p=4k-1$, $k\in\mathbf{Z}$ paraméterérték mellett van megoldása, és ekkor $x=-1$.

(ESZÉV 2011.05/3)

Legyen f a felnőtt tagok száma. Ekkor a diákok száma $640-f$. A rendszeresen sportolók száma: $640\cdot 0{,}55=352$. A rendszeresen sportolók aránya a felnőttek között: $0{,}55\cdot\frac{8}{11}=0{,}4$ és a diákok között: $2\cdot 0{,}4=0{,}8$. A rendszeresen sportolók száma: $0{,}4f+0{,}8(640-f)=352$. Innen $f=400$ és $640-f=240$. Így a felnőtt tagok száma 400, a diákok száma 240.

(EFFM 1992-94/3/3)

a) $\frac{1+\sin(2\alpha)}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=3.$

b) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cdot 2^2=8.$

(ESZÉV 2011.10/4)

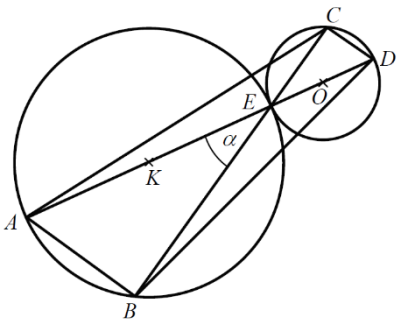
Azonos alapú logaritmusra áttérve: $\log_x y+\frac{1}{\log_x y}=2$. Innen $\log_x y=1$, azaz $x=y$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe: $\sin 5x=\frac{1}{2}$ adódik. Ez utóbbi egyenlet megoldása: $x_1=y_1=\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$ és $x_2=y_2=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}l\pi$, ahol $k,l\in\mathbf{N}$. A kapott értékek (melyek egyike sem 1) kielégítik az eredeti egyenleteket.

(ESZÉV 2015.05/4)

a) $\overrightarrow{BA}(-18;6)$, $\overrightarrow{BC}(8;-2)$. A $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ skaláris szorzatából: $\cos\beta=\frac{-156}{\sqrt{360}\cdot\sqrt{68}}\approx -0{,}9971$, melyből $\beta\approx 175{,}6°$.

b) Az *ABC* háromszög két oldalfelező merőlegesének metszéspontját kell megkeresnünk (ez a háromszög körülírt körének középpontja). Az *AB* és *BC* szakasz felezőmerőlegeseinek egyenlete: $3x-y=-28$ és $4x-y=21$. Metszéspontjuk: $K(49;175)$.

(ESZÉV 2009.05/8)



a) Thalész tételéből adódóan: $ABE\angle=DCE\angle=90°$. Mivel *AB* és *CD* merőleges a *BC* egyenesre, ezért az *ABDC* négyszögnek van párhuzamos oldalpárja, azaz trapéz.

b) Az *ABE* és *DCE* derékszögű háromszögekben $BE=2R\cos\alpha$, $AB=2R\sin\alpha$ és $EC=2r\cos\alpha$. Mivel *ABC* derékszögű háromszög, ezért $t=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{AB\cdot(BE+EC)}{2}=2R(r+R)\sin\alpha\cos\alpha=R(r+R)\sin 2\alpha$.

c) Mivel $t=R(r+R)\sin 2\alpha$, ezért a terület maximális, ha $\sin 2\alpha$ a lehető legnagyobb, azaz $\sin 2\alpha=1$, innen $\alpha=45°$.