1. FELADAT
Adottak a $H = \{1; 2; 3; 4; \ldots; 12\}$ alaphalmazon az *A*, *B*, *C* halmazok: $A = \{2; 5; 6; 8; 9; 11\}$, $B = \{1; 2; 7; 8; 9; 12\}$, $C = \{1; 3; 6; 8; 12\}$. Határozza meg az $(\overline{A \cap B})\backslash C$ halmaz elemeit!

2. FELADAT
Az *a* és a *b* tetszőleges valós számot jelöl. Adja meg annak az egyenlőségnek a betűjelét, amelyik biztosan igaz (azonosság)!

A) $(b-2a)^2 = b^2 - 2a^2$. *B*) $(b-2a)^2 = b^2 - 4ab - 4a^2$.
C) $(b-2a)^2 = b^2 - 4a^2$. *D*) $(b-2a)^2 = b^2 - 4ab + 4a^2$.

3. FELADAT
Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{3^x}{81} = 27^{x-1}.$$

4. FELADAT
Két testvér a bérletpénztárnál jegyet vásárol. Az egyik 2 vonaljegyért és egy átszállójegyért 1230 Ft-ot, a másik 6 vonaljegyért és 4 átszállójegyért 4220 Ft-ot fizet. Mennyibe kerül egy vonaljegy és egy átszállójegy?

5. FELADAT
Melyik szám a nagyobb: 11010111_2 vagy 21221_3? Indokolja válaszát!

6. FELADAT
Egy 24 cm sugarú kör középpontjától 40 cm-re lévő pontból érintőket húzunk a körhöz. Mekkorák ezek az érintőszakaszok? Mekkora az érintők hajlásszöge?

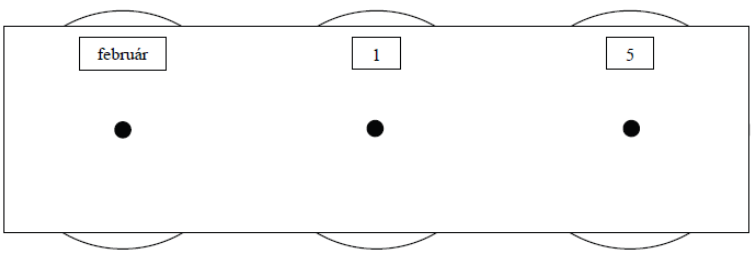
7. FELADAT
Egy trapéz egyik alapja 4,8 cm, a többi három oldala 3,2 cm hosszúságú.

a) Határozza meg a trapéz átlóinak és szögeinek a nagyságát!
b) Mekkora a trapéz területe?

8. FELADAT
Az $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz elemei közül véletlenszerűen kiválasztunk két különbözőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a két kiválasztott szám átlaga egész szám lesz?

9. FELADAT
A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a 0, 1, 2, 3; a jobb szélsőn pedig a 0, 1, 2, 3, … 8, 9 számjegyek szerepelnek. Például az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat”.

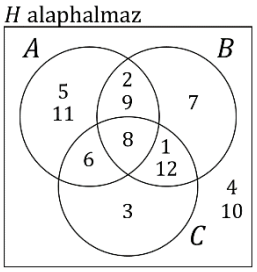
a) Összesen hány „dátum” forgatható ki?
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan dátumot forgatunk ki, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév?



Megoldások:

1. FELADAT

Mivel $A \cap B = \{2; 8; 9\}$, ezért $\overline{A \cap B} = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12\}$, és így $\left(\overline{A \cap B}\right) \backslash C = \{4; 5; 7; 10; 11\}$.



Megjegyzés: A feladat Venn-diagramja:

2. FELADAT

D.

3. FELADAT

Az egyenlet mindkét oldalán áttérve 3-mas alapú hatványokra: $3^{x-4} = 3^{3(x-1)}$. Innen (az exponenciális függvény egyértelműsége miatt) $x - 4 = 3(x - 1)$, azaz $x = -\frac{1}{2}$.

4. FELADAT

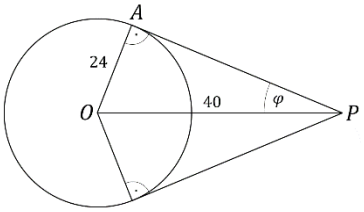
Jelölje *x* a vonaljegy, *y* az átszállójegy árát. A feladat szövege szerint felírható a következő egyenletrendszer: $2x + y = 1230$ és $6x + 4y = 4220$. Innen $x = 350$ és $y = 530$, azaz a vonaljegy 350 Ft, az átszállójegy 530 Ft.

5. FELADAT

Mivel $11010111_2 = 215$ és $21221_3 = 214$, ezért $11010111_2 > 21221_3$.

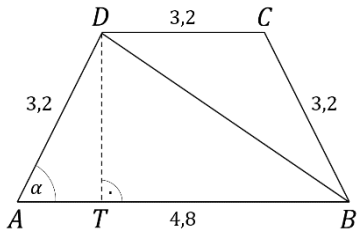
6. FELADAT

Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. *AOP* háromszögben Pitagorasz-tétel szerint: $AP = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$, azaz az érintők 32 cm-esek. $\sin\varphi = \frac{24}{40}$, melyből $\varphi \approx 36{,}87°$, azaz az érintők hajlásszöge kb. 73,74°.



7. FELADAT

a) Mivel a trapéz szimmetrikus, ezért $AT = 0{,}8$ cm. *ATD* háromszögben: $\cos\alpha = \frac{0{,}8}{3{,}2}$, melyből $\alpha = 75{,}52°$. A trapéz szögei: 75,52° és 104,48°. *ATD* és *TBD* háromszögekben Pitagorasz-tétel szerint: $TD = \sqrt{3{,}2^2 - 0{,}8^2} \approx 3{,}1$, és így $BD = \sqrt{3{,}1^2 + 4^2} \approx 5{,}06$, azaz az átlók kb. 5,06 cm-esek.



b) A trapéz területe: $T = \frac{4{,}8+3{,}2}{2} \cdot 3{,}1 = 12{,}4$ cm^2.

8. FELADAT

Az öt számból kettőt $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen lehet kiválasztani (összes eset száma). A kiválasztott számok átlaga pontosan akkor egész szám, ha a kiválasztott számok összege páros szám, azaz, ha két páros vagy két páratlan számot választunk. A kedvező esetek: 1-3, 1-5, 3-5 és 2-4, ezek száma 4. A kérdéses valószínűség: $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

9. FELADAT

a) A lehetséges „dátumok” száma: $12 \cdot 4 \cdot 10 = 480$.

b) Valóságos dátumból (nem szökőévben) 365 darab van. Minden dátum egyenlő valószínűséggel forgatható ki, ezért valóságos dátumot $\frac{365}{480} \approx 0{,}7604$ valószínűséggel kaphatunk.