UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2020.05/1)
Az *ABCD* téglalap oldalainak hossza $AB = 17$ cm és $AD = 8$ cm.

a) Mekkora területű részt fed le a téglalapból az *A* középpontú, 17 cm sugarú kör?
b) Az *APCQ* rombusz *P* csúcsa a téglalap *AB* oldalának belső pontja, *Q* csúcsa pedig a *CD* oldal belső pontja. Számítsa ki a rombusz kerületét!

(ESZÉV-NY 2020.05/2)
a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!
$|x - 2| = 7 + x - 0{,}25x^2$.

b) Hány olyan egész szám van, amelyik megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?
$\log_2(x^2 - 200) < 20$.

(EFFM 1996-98/96.2/2)
Egy egyenlő szárú háromszög súlyvonalainak a hossza 90, 51, 51. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?

(EFFM 1999-01/99.12/4)
Melyek azok a $C(2; 1)$ középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében lévő pontok, amelyek koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei?

$$3^x + 3^{y-\frac{1}{2}} = 4; \qquad (2x - y)^2 = \frac{9}{4}.$$

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/7)
Egy családi ház lakói télen a tetőtér hőmérsékletét egyenletes, 15 °C-os hőmérsékleten tartják. Sajnos egy téli napon a fűtés elromlott, így a kinti, állandónak tekinthető, –5 °C-os környezeti hőmérsékleten a jól hőszigetelt tetőtér hőmérséklete fokozatosan csökkeni kezdett. A tervezőmérnök kiszámolta, hogy a tetőtér *T* hőmérsékletét az idő függvényében jó közelítéssel

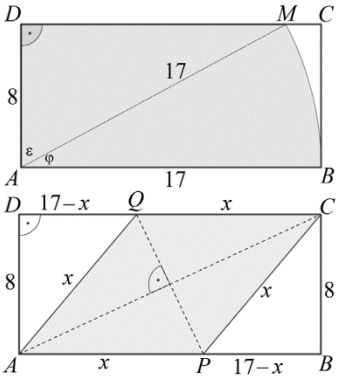
$$T = T_k + A \cdot 0{,}9^{\frac{t}{3}}$$

összefüggés írja le, ahol T_k (a külső környezet hőmérséklete) és *A* °C-ban megadott állandók, a *t* pedig órában mérve a lehűlés kezdete óta eltelt időt jelenti. A kezdeti feltételek ismeretében határozza meg a képletben szereplő T_k és *A* állandók értékét! Mennyi idő múlva éri el a tetőtér hőmérséklete a kritikus +3 °C-ot?

(ESZÉV 2018.10/8)
Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység, és a másik két oldala is egész szám? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.)

Megoldások:

(ESZÉV-NY 2020.05/1)



a) Az *ADM* derékszögű háromszögből $DM = 15$ (cm) és $\varepsilon \approx 61{,}93°$. A *BAM* körcikk középponti szöge: $\varphi \approx 28{,}07°$. Az *ADM* háromszög területe 60 (cm^2), a *BAM* körcikk területe kb. 70,8 (cm^2). A lefedett rész területe így kb. 130,8 cm^2.

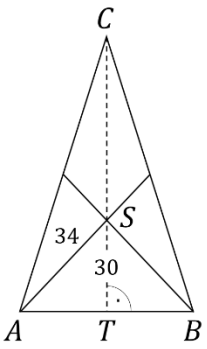
b) Legyen a rombusz oldalának hossza *x* cm. Ha $CAB\sphericalangle = \alpha$, akkor az *ABC* háromszögből $\alpha \approx 25{,}2°$ és így $DAQ\sphericalangle = 90° - 2\alpha \approx 39{,}6°$. Az *ADQ* háromszögből $x \approx 10{,}38$ (cm). A rombusz kerülete $4x \approx 41{,}5$ cm.

(ESZÉV-NY 2020.05/2)

a) Ha $x \geq 2$, akkor az eredeti egyenlet: $x - 2 = 7 + x - 0{,}25x^2$, ha $x < 2$, akkor pedig: $-(x-2) = 7 + x - 0{,}25x^2$. Az első esetben $x = \pm 6$, a másodikban $x = -2$ és 10. A -6 és a 10 nem eleme a kijelölt alaphalmaznak, így az eredeti egyenlet megoldása: -2 és 6.

b) Értelmezési tartomány: $x < -10\sqrt{2}$ vagy $x > 10\sqrt{2}$. A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt az egyenlőtlenség $x^2 - 200 < 2^{20}$ alakra hozható. Innen $-\sqrt{2^{20} + 200} < x < \sqrt{2^{20} + 200}$. A feltételek miatt $-1024 \leq x \leq -15$ vagy $15 \leq x \leq 1024$, így ezen intervallumokba eső egész számok száma 2020.

(EFFM 1996-98/96.2/2)



A háromszög *S* súlypontja harmadolja a súlyvonalakat, ezért $ST = 30$, $SA = 34$. *ATS* derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AT = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$, ezért $AB = 32$. *ATC* derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AC = \sqrt{16^2 + 90^2} \approx 91{,}41$. Ugyanebben a háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{90}{16}$, melyből $\alpha \approx 79{,}92°$. A szárak szöge így kb. 20,16°.

(EFFM 1999-01/99.12/4)

Az egyenletrendszer megoldása a $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ és az $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ számpár. Az adott kör belsejében azok és csak azok a pontok vannak, amelyeknek koordinátái kielégítik az $(x-2)^2 + (y-1)^2 < 4$ egyenlőtlenséget. Ennek az $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ pont tesz eleget.

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/7)

$T_k = -5$ °C a külső környezet hőmérséklete. A folyamat kezdetén $t = 0$, így $0{,}9^{\frac{0}{3}} = 1$, és ekkor a belső hőmérséklet $T = 15$ °C. Behelyettesítés után $15 = -5 + A$, innen $A = 20$ °C. A kritikus hőmérséklet elérésének idejét a $3 = -5 + 20 \cdot 0{,}9^{\frac{t}{3}}$ egyenletből határozhatjuk meg. Innen $t \approx 26{,}09$, tehát kb. 26 óra múlva hűl le +3 °C-ra a tetőtér.

(ESZÉV 2018.10/8)

Az ismeretken befogó legyen *b*, az átfogó pedig *c* (és mindkettő pozitív egész). Pitagorasz-tétel miatt $15^2 + b^2 = c^2$, innen $225 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$. Mivel $225 = 3^2 \cdot 5^2$ és $0 < c - b < c + b$, ezért a tényezőkre bontás lehetőségei: $(c-b)(c+b) = 1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$. A *c* lehetséges értékei rendre: 113, 39, 25, 17, a hozzá tartozó *b* értékek rendre 112, 36, 20, 8. Tehát négy megfelelő derékszögű háromszög van.