UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2007.05/1)
Oldja meg az alábbi egyenletrendszert! Az *x* és az *y* valós számokat jelölnek.

$$\begin{cases} \log_2(2x+y) - \log_2(x-1{,}5y) = 2; \\ \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 2 + \log_3 5\,. \end{cases}$$

(ESZÉV-NY 2007.05/2)
a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 0{,}5x + 2$ és az $y = -0{,}5x + 4$ egyeneseket!
b) Az *x* tengely, az *y* tengely és a két ábrázolt egyenes közrefog egy konvex négyszöget. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?
c) Az *x* tengely, az *y* tengely és a két ábrázolt egyenes hat metszéspontja közül négy egy konkáv négyszög négy csúcsát határozza meg. Mekkora ennek a konkáv négyszögnek a kerülete?

(EFFM 1992-94/108/3)
Egy számtani sorozatban az első 21 elem $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21}$. Ezek közül a páratlan sorszámú elemek összege 15-tel nagyobb, mint a páros sorszámú elemek összege, továbbá tudjuk, hogy $a_{20} = 3a_9$. Mennyi a_{12}?

(ESZÉV-NY 2009.05/3)
Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ függvény.
a) Számítsa ki a függvény zérushelyeit és számítással határozza meg a függvény minimumának helyét és értékét!
b) Ábrázolja a függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon!
c) Határozza meg az $y = 2x^2 - 4x - 6$ egyenletű parabola fókuszpontjának koordinátáit!

(EFFM 1999-01/99.37/5)
Egy erdő faállománya az év elején 32 000 m^3, ami év végére 2%-kal nő. Mennyit vághatunk ki belőle évente az év végén, minden évben ugyanannyit, ha azt akarjuk, hogy a 30. év végén 40 000 m^3 legyen a faállomány?

(ESZÉV 2014.05/5)
a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs!
b) Oldja meg a valós számok halmazán a $2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$ egyenletet!
c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke!

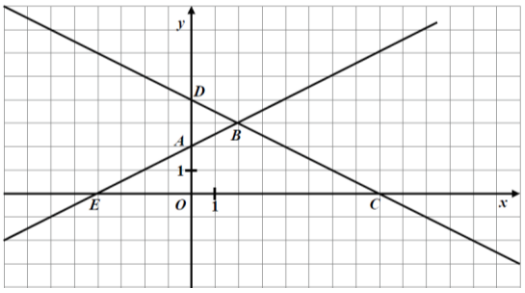
Megoldások:

(ESZÉV 2007.05/1)

Az első egyenletből $x = 3{,}5y$, a másodikból $x^2 - y^2 = 45$ adódik. Ennek gyökpárja az $x = 7$ és az $y = 2$. Ez az értékpár mindkét eredeti egyenletet is kielégíti.

(ESZÉV-NY 2007.05/2)

a) Az egyenesek helyes ábrázolása:



b) A konvex négyszög csúcsai *A*, *B*, *C*, *O*, ahol $B(2;3)$. A négyszög területe 14 területegység.

c) A konkáv négyszög csúcsai: *E*, *C*, *D*, *A*, az oldalai: $EC = 12$, $CD = \sqrt{80}$, $DA = 2$, $AE = \sqrt{20}$, $ED = 4\sqrt{2}$ és $CA = \sqrt{68}$, így a kerületek: $k_1 \approx 27{,}42$, $k_2 \approx 27{,}32$ és $k_3 \approx 27{,}91$.

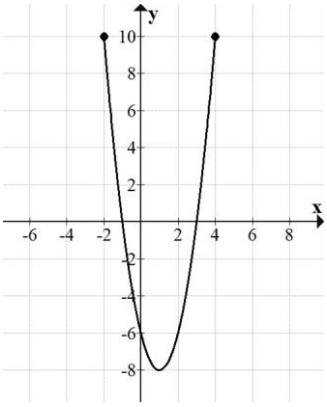
(EFFM 1992-94/108/3)

A páros és a páratlan sorszámú elemek is számtani sorozatot alkotnak, ezért a feltétel szerint $\frac{a_1+a_{21}}{2} \cdot 11 = 15 + \frac{a_2+a_{20}}{2} \cdot 10$ és $a_{20} = 3a_9$. Áttérve a_1-re és *d*-re az egyenletrendszer megoldása $a_1 = -5$ és $d = 2$. Ezzel $a_{12} = 17$ és ez valóban megoldás.

(ESZÉV-NY 2009.05/3)

a) A függvény zérushelyei $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$, melyek számtani közepe adja a minimum helyet, ami $x = 1$, értéke $y = -8$.

b) A függvény az $y = 2(x-1)^2 - 8$ teljes négyzetté alakítás után ábrázolva:



c) A parabola paramétere: $p = \frac{1}{4}$. A fókuszpont a tengelypont felett van $\frac{p}{2}$ távolságra, így a parabola fókuszpontja: $F\left(1; -\frac{63}{8}\right)$.

(EFFM 1999-01/99.37/5)

Minden év végén az előző évi állomány 1,02-szorosára nő, de ez *x*-szel csökken, ezért $a_1 = 32\,000 \cdot 1{,}02 - x$; $a_2 = (32\,000 \cdot 1{,}02 - x) \cdot 1{,}02 - x = 32\,000 \cdot 1{,}02^2 - x(1{,}02 + 1)$; …, és így tovább. A 30. év végén $a_{30} = 32\,000 \cdot 1{,}02^{30} - x(1{,}02^{29} + 1{,}02^{28} + \cdots + 1)$, ami a feltétel szerint 40 000-rel lesz egyenlő. A zárójelben lévő összeg a mértani sorozat összegképletével határozható meg. Így a keresett mennyiség $x \approx 442{,}8$ m^3 fa.

(ESZÉV 2014.05/5)

a) Mivel $2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(2x+1)(x-3) = 0$, ezért a megadott gyökök (és csak ezek) valóban kielégítik az egyenletet.

b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, ahol $k, m \in \mathbf{Z}$.

c) Az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, így az egyenlet bal oldalán szereplő minden tag pozitív, azaz összegük nem lehet 0.