UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

***(ESZÉV-NY 2006.05/1)***
Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(3;5)$ és $B(7;1)$. A háromszög harmadik csúcsa illeszkedik az *y* tengelyre.

*a)* Számítsa ki a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit!
*b)* Írja fel a háromszög köré írt kör egyenletét!

***(MFVKR 5.54)***
A *p* paraméter mely értékeire lesznek az

$$x \longmapsto x^2 - (8p-2)x + 15p^2 - 2p - 7$$

függvény értékei bármely valós *x* esetén pozitívak?

***(ESZÉV 2005.10/3)***
Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.

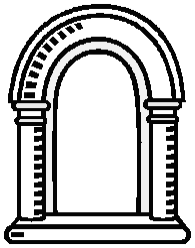
*a)* Mekkora összeget kapott Péter?
*b)* Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60 000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100 000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

***(ESZÉV-NY 2009.05/4)***
Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \log_{0,1}(x+2) < 0.$$

***(EFFM 1972-73/51/4)***
Egy háromszög oldalai 15 cm, 20 cm és 7 cm hosszúak. Mekkora a 15 cm-es oldalhoz tartozó (kisebbik) körszelet területe a háromszög köré írt körben?

***(AFGY II/2922)***
Az ábrán egy félkörrel tetőzött téglalap alakú ablak látható. Az ablak kerülete közelítően 8 m. Mekkorára kell megválasztani a téglalap oldalait, hogy az ablak a lehető legtöbb fényt bocsássa át?



***(ESZÉV-NY 2009.05/5)***
Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első három tagja: *a, b, c*. Ha az első két tag változatlanul hagyása mellett a harmadik tagot $(a+2b)$-vel csökkentjük, akkor egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Az $a; b+9; c$ számok ebben a sorrendben ugyancsak egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozza meg az *a, b* és *c* számokat!

***Megoldások:***

***(ESZÉV-NY 2006.05/1)***

*a)* A háromszög *C* csúcsát az *AB* szakasz $x - y = 2$ egyenletű felezőmerőlegese metszi ki az *y* tengelyből. $C(0; -2)$.

*b)* A köré írt kör középpontja az *AB* alap felezőmerőlegesének és valamelyik szár felezőmerőlegesének a metszéspontja. A kör középpontja $K(2{,}9; 0{,}9)$, sugarának négyzete 16,82, így a kör egyenlete: $(x - 2{,}9)^2 + (y - 0{,}9)^2 = 16{,}82$.

***(MFVKR 5.54)***

A feltétel akkor teljesül, ha a függvény grafikonja teljes egészében az abszcissza tengely felett helyezkedik el. Ez akkor igaz, ha az $x^2 - (8p - 2)x + 15p^2 - 2p - 7 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív. Innen $p^2 - 6p + 8 < 0$ egyenlőtlenség kapható, melyből a keresett értékek $2 < p < 4$.

***(ESZÉV 2005.10/3)***

*a)* A nagypapa kilenc alkalommal tett pénzt a perselybe. A Péter által kapott összeg egy olyan számtani sorozat első 9 elemének összege, amelynek első eleme 5000, differenciája 1000. A kérdéses összeg $\frac{9}{2} \cdot [2 \cdot 5000 + (9 - 1) \cdot 1000] = 81\,000$, így Péter 81 000 Ft-ot kapott.

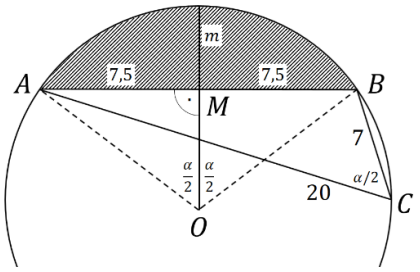
*b)* $t_0 = 60\,000$, $t_n = t_0 \cdot 1{,}04^n = 60\,000 \cdot 1{,}04^n$, ahol *n* pozitív egész számot jelöl. A feltétel szerint $60\,000 \cdot 1{,}04^n \geq 100\,000$. Osszuk mindkét oldalt 60 000-rel, majd vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 1{,}04^n \geq \lg \frac{5}{3}$. Innen $n \geq \frac{\lg \frac{5}{3}}{\lg 1{,}04} \approx 13{,}024 > 13$, ami azt jelenti, hogy legalább 14 évet kell Péternek várnia.

***(ESZÉV-NY 2009.05/4)***

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $-2 < x \leq 0$ vagy $x \geq 3$. A szorzat akkor lesz negatív, ha tényezői különböző előjelűek. Mivel az első tényező negatív nem lehet, ezért $\sqrt{x^2 - 3x} > 0$ és $\log_{0{,}1}(x + 2) < 0$ esetet kell vizsgálni. Az elsőből $-2 < x < 0$ vagy $x > 3$, a másodikból $x > -1$ adódik. Metszetüket véve a megoldás: $-1 < x < 0$ vagy $x > 3$.

***(EFFM 1972-73/51/4)***

A körszelet keresett területét megkapjuk, ha az *OAB* körcikk területéből kivonjuk az *QAB* háromszög területét, azaz $T = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$. Az *ABC* háromszögből koszinusztételt alkalmazva: $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{400 + 49 - 225}{2 \cdot 20 \cdot 7} = \frac{4}{5}$, melyből $\alpha \approx 73{,}74°$. A kör sugara 12,5 cm, és így a terület kb. 25,55 cm$^2$.




***(AFGY II/2922)***

Az ablak alapja *a*, magassága (a félkört kivéve) *b*, a kerület 8. A legtöbb fényt a legnagyobb területű ablak bocsátja be. $K = a + 2b + \frac{a}{2}\pi = 8$, ekkor $t = ab + \frac{a^2}{8}\pi$, ami akkor maximális, ha $a = \frac{16}{4 + \pi} \approx 2{,}24$ és $b = \frac{8}{4 + \pi} \approx 1{,}12$.

***(ESZÉV-NY 2009.05/5)***

A mértani sorozat tagjai: $a; b = aq$ és $c = aq^2$. Az első számtani sorozat tagjai: $a; aq; aq^2 - a - 2aq$. A második számtani sorozat tagjai: $a; aq + 9; aq^2$. A számtani közép tulajdonság szerint: $aq = \frac{a + aq^2 - a - 2aq}{2}$, illetve $aq + 9 = \frac{a + aq^2}{2}$. Az utóbbi egyenletek rendezésével a következő egyenletrendszert kapjuk: $aq^2 - 4aq = 0$ és $aq^2 - 2aq + a = 18$. Mivel $aq \neq 0$, ezért az első egyenletből $q = 4$, a második egyenletből pedig $a = 2$. Így a keresett számok: $a = 2$, $b = 8$ és $c = 32$.