UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(MFGY I/IV/1271)
Mely valós *x*-ekre teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\log_{x^2-3}(4x+2) \geq 1.$$

(EFFM 1992-94/169/2)
Mely valós számpárokra teljesül a következő egyenletrendszer?

$$\begin{cases} 2^x = 32 \cdot 2^{-y}; \\ \lg(x+y) + \lg 5 = 2 - \lg(5x-2y). \end{cases}$$

(ESZÉV 2009.05/3)
a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? Adja meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

b) Jelölje *e* azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete $2x + y = b$, ahol *b* valós paraméter. Mekkora lehet *b* értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott *e* egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek?

(EFFM 1992-94/151/6)
Állapítsa meg az $\frac{(x+1)(x^2-7x+10)}{x-2}$ kifejezés

a) zérushelyeit,
b) legnagyobb és legkisebb értékét, ha $-2 \leq x \leq 7$.

(ESZÉV 2013.05/6)
Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7. A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük. Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

(ESZÉV 2016.05/7)
Adott az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - 1$; $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 3x + 2$ és $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 12 - x^2$.

a) Legyen a *k* összetett függvény belső függvénye az *f* és külső függvénye a *h* (vagyis $k(x) = h\big(f(x)\big)$ minden *x* valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.

b) Oldja meg az $f\big(g(x)\big) < g\big(f(x)\big)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

(EFFM 1972-73/99/7)
Számítsa ki $\cos 2x$ pontos értékét a szög kiszámolása nélkül, ha *x* eleget tesz a következő feltételeknek:

$$2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 2 = 0; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Megoldások:

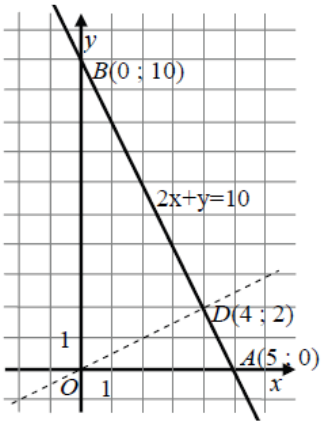
(MFGY I/IV/1271)

A logaritmus miatt $x > -\frac{1}{2}$, $x < -\sqrt{3}$ vagy $x > \sqrt{3}$ és $x \neq \pm 2$, így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > \sqrt{3}$ és $x \neq 2$. Az egyenlőtlenség $\log_{x^2-3}(4x+2) \geq \log_{x^2-3}(x^2-3)$ alakra hozható. Innen két esetet kell vizsgálni a logaritmus alapja szerint: ha $x^2-3 > 1$, akkor $4x+2 \geq x^2-3$, ha $0 < x^2-3 < 1$, akkor $4x+2 \leq x^2-3$. Az első esetben $2 < x \leq 5$, a második eset nem ad megoldást. Így az egyenlőtlenség megoldása: $2 < x \leq 5$.

(EFFM 1992-94/169/2)

A logaritmus értelmezési tartománya miatt: $x+y > 0$ és $5x-2y > 0$. Átalakítások után az első egyenlet $x+y=5$, a második $(5x-2y)(x+y)=20$ alakra hozható. Innen a keresett megoldások: $x=2$ és $y=3$, melyek kielégítik az eredeti egyenletrendszert.

(ESZÉV 2009.05/3)



a) A $2x+y=10$ egyenes az $A(5;0)$ és a $B(0;10)$ pontban metszi a tengelyeket. Az origóból az egyenesre bocsátott, rá merőleges egyenes egyenlete: $x-2y=0$. A két egyenes D metszéspontjának koordinátái: $D(4;2)$. A megadott feltételeknek három derékszögű háromszög felel meg: AOB, ADO és BDO.

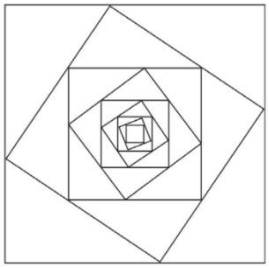
b) Az egyenesnek és a körnek csak akkor van közös pontja, ha az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszernek van megoldása (azaz az egyenletrendszerből kapott diszkrimináns nem negatív): $D = 320 - 4b^2 \geq 0$, innen $b \in \left[-4\sqrt{5}; 4\sqrt{5}\right]$.

(EFFM 1992-94/151/6)

a) Zérushelye ott lesz, ahol a számláló 0. Ebből $x_1=-1$, $x_2=2$ és $x_3=5$, de 2-re a kifejezés nem értelmezett, így két zérushely van.

b) A kifejezés $\frac{(x+1)(x-5)(x-2)}{x-2} = (x+1)(x-5) = (x-2)^2 - 9$ alakra hozható, ahol $x \neq 2$. A másodfokú függvény felrajzolásával megmutatható, hogy az adott intervallumban nincs minimuma ($x=2$-nél lenne, de ott a függvény nincs értelmezve). Maximuma az intervallum két szélén lehet. Mivel $f(-2)=7$ és $f(7)=16$, ezért a legnagyobb értéke 16.

(ESZÉV 2013.05/6)



$K_1 = 4$ (m), $K_2 = 4 \cdot \frac{5}{7}$ (m), és a négyzetek hasonlósága miatt minden további négyzet kerülete $\frac{7}{5}$-szerese a megelőzőnek. A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q = \frac{5}{7}$. Mivel $|q| < 1$, ezért a sor konvergens. A végtelen mértani sor összege: $S = K_1 + K_2 + \cdots = K_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{5}{7}} = 14$.

(ESZÉV 2016.05/7)

a) $k(x) = 12 - (2^x-1)^2 = 12 - (4^x - 2^{x+1} + 1) = 11 - 2^{x+1} - 4^x$, tehát igaz az állítás.

b) Megoldandó a $2^{3x+2} - 1 < 3(2^x-1) + 2$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán, ami $4^x < 0{,}75$ alakra hozható. A 4-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért $x < \log_4 0{,}75 \approx -0{,}2075$.

(EFFM 1972-73/99/7)

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ miatt az egyenlet megoldása: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. Átalakítva a keresett kifejezést: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ kiszámítása a feladat $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$-ből. Innen a keresett érték $\frac{3}{5}$.