UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1993-95/94.17/1)
Mely valós *x* számok elégítik ki a következő egyenletet?

$$\frac{16^x + 4^{x+1}}{3 \cdot 16^x - 4^{x-1}} = \frac{18}{5}.$$

(ESZÉV-NY 2007.05/4)
Az *ABCDEFGH* téglatest élei: $AB = 10$, $AD = 8$, $AE = 6$. Az *A* csúcsból induló élvektorok: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Az *A* csúcsból e három élvektor, továbbá három lapátlóvektor és egy testátlóvektor indul ki. Adja össze ezt a hét vektort, az összegvektort jelölje $\overrightarrow{AP}$!

a) Fejezze ki $\overrightarrow{AP}$ vektort az **a**; **b** és **c** élvektorokkal!
b) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AP}$ vektor?
c) Mekkora szöget zár be $\overrightarrow{AP}$ az $\overrightarrow{AE}$ vektorral?
d) Mennyi az $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP}$ értéke, ha *S* a *HFC* háromszög súlypontja?

(ESZÉV 2014.10/5)
Egy kosárlabda csapathoz csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt. Hány tagja volt a csapatnak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt?

(ESZÉV 2019.05/6)
Egy háromszög csúcsai $A(-6; 0)$, $B(6; 0)$ és $C(0; 8)$. Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű *e* egyenes felezi az *ABC* háromszög kerületét és területét is!

(ESZÉV 2013.10/7)
Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$. A hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

(ESZÉV 2006.05/8)
a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével az $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt a $[-3; 4]$ intervallumon!
b) Legyen az *f*, *g* és *h* függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = x - 3$ és $h(x) = |x|$. Készítse el az *f*, *g* és *h* függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit!
c) Keressen példát olyan *p* és *t*, a valós számok halmazán értelmezett függvényekre, amelyre $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)$! Adja meg a *p* és *t* függvények hozzárendelési szabályát!

Megoldások:

(EFFM 1993-95/94.17/1)

Felhasználva, hogy $16^x = 4^{2x}$, az egyenlet a $49 \cdot 4^{2x} - 24{,}5 \cdot 4^x = 0$ másodfokú egyenletté alakítható. Innen $4^x = 0$, ami $4^x > 0$ miatt nem ad megoldást, vagy $4^x = \frac{1}{2}$, melyből $x = -\frac{1}{2}$.

(ESZÉV-NY 2007.05/4)

a) A hét vektor összege: $\overrightarrow{AP} = 4(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

b) Mivel $\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{AG}$, ezért az $\overrightarrow{AP}$ vektor hossza az *AG* testátló hosszának négyszerese. Pitagorasz-tételt felhasználva $AG = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ és így $AP = 4AG = 40\sqrt{2} \approx 56{,}57$.

c) Az $\overrightarrow{AP}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektor szöge megegyezik az $\overrightarrow{AG}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorok szögével. Ez a szög az *AEG* derékszögű háromszög *A*-nál lévő szöge: $\alpha \approx 64{,}9°$.

d) A *HFC* háromszög súlypontjába vezető helyvektor a csúcsokba vezető helyvektorok összegének harmada. Ezt felhasználva: $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. A keresett érték: $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{1600}{3} \approx 533{,}3$.

(ESZÉV 2014.10/5)

A két új játékos csatlakozása előtt a csapat tagjainak száma *x*, a tagok magasságának átlaga pedig *y* cm volt ($x \in \mathbf{N}$ és $y > 0$). Az első új játékos belépése előtt a csapattagok magasságának összege xy volt, az új játékos belépése után $xy + 195$ lett, tehát $\frac{xy+195}{x+1} = y + 0{,}5$. Hasonlóan a második új játékos belépését követően $\frac{xy+195+202}{x+2} = y + 1{,}5$. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 10$ és $y = 189{,}5$, azaz a tagok száma 10, átlagmagasságuk pedig 189,5 cm volt.

(ESZÉV 2019.05/6)

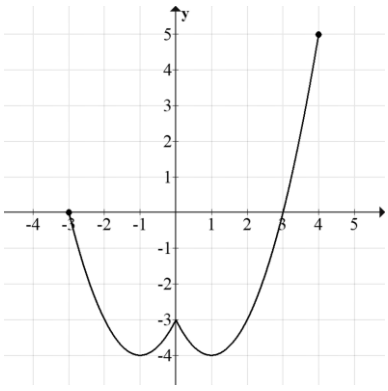
Az *e* egyenes az *x* tengelyt a $D(-4; 0)$ pontban metszi. Keressük *BC* és az *e* egyenes *M* metszéspontját. A *BC* egyenes egy normálvektora $(4; 3)$, egyenlete: $4x + 3y = 24$. A *BC* és az *e* egyenes metszéspontját a $4x + 3y = 24$ és $3x - 4y = -12$ egyenletrendszer megoldása adja. Innen $x = 2{,}4$ és $y = 4{,}8$, tehát $M(2{,}4; 4{,}8)$. A *DBM* háromszög területe: $\frac{10 \cdot 4{,}8}{2} = 24$. Mivel az *ABC* háromszög területe $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$, az *e* valóban felezi az *ABC* háromszög területét. Pitagorasz-tételből $AC = 10$ és $BM = 6$. Az *ABC* háromszög kerülete így $2 \cdot 10 + 12 = 32$, továbbá $DB + BM = 10 + 6 = 16$, tehát az *e* egyenes valóban felezi az *ABC* háromszög kerületet is.

(ESZÉV 2013.10/7)

A t_1 területű szabályos hatszög oldala az *ABC* háromszög *AC* oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, és így $t_1 = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$. $t_2 = t_1 - 6 \cdot \frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{225\sqrt{3}}{16}$. A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $q = \frac{3}{4}$. A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja t_1, hányadosa pedig *q*. Mivel $|q| < 1$, ezért létezik az összeg, és így $\lim_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) = \frac{t_1}{1-q} = 75\sqrt{3}$.

(ESZÉV 2006.05/8)

a) $x \mapsto x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases}(x+1)^2 - 4, & x \in]-3; 0];\\ (x-1)^2 - 4, & x \in [0; 4].\end{cases}$



b) 6 különböző összetett függvény létezik a feltételek szerint: $(f \circ g)(x) = x^2 - 8x + 18$, $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x - 6$, $(h \circ f)(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $(f \circ h)(x) = x^2 - 2|x| - 3$, $(g \circ h)(x) = |x| - 3$, $(h \circ g)(x) = |x - 3|$.

c) Egy egyszerű példa: $p(x) = x + c$ és $t(x) = x - c$, ahol *c* nullától különböző konstans. $(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x) = x$.