UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2005.10/1)
Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$, $B(-1;5)$, a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$.

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit!
b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

(ESZÉV 2018.10/2)
a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x}-50\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}+30\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}=81.$$

b) Igazolja, hogy $\frac{\lg 5^{x}+\lg 5^{-x}}{2}\le \lg\frac{5^{x}+5^{-x}}{2}$, ahol $x\in\mathbf{R}$.

(ESZÉV 2016.05/3)
a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

(ESZÉV 2020.05/4)
Adott az $x^2-(4p+1)x+2p=0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!
b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?
c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/4)
Adott az $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^2+1$ és a $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto 2x+3$ függvény.

a) Határozza meg az $f\circ g$ összetett függvény hozzárendelési szabályát! (A polinomfüggvény fokszám szerinti rendezett alakját adja meg!) Az $f\circ g$ összetett függvény definíciója: $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$.
b) Számítsa ki a $g\circ f$ függvény $x=1$ helyen felvett helyettesítési értékét!
c) Legyen $(a_n)=\frac{2n+3}{n^2+1}$, ahol $n\in\mathbf{N}^+$. Állapítsa meg a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ határértéket, és adjon meg egy olyan n_0 küszöbindexet, amelynél nagyobb n-ekre az (a_n) sorozat 0,01-nál jobban közelíti a határértéket!

Megoldások:

(ESZÉV 2005.10/1)

a) Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a köré írt kör középpontja. A köré írt kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$, melyből $O(3;2)$.

b) A *C* pont illeszkedik az *y* tengelyre, ezért ha *c* jelöli a *C* pont második koordinátáját, akkor $C(0;c)$. A *C* illeszkedik a körre is, ezért $(-3)^2+(c-2)^2=25$, melyből $c_1=-2$ és $c_2=6$, azaz a *C* csúcsra két lehetőség van: $C_1(0;6)$ és $C_2(0;-2)$. Az ABC_1 háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$, az ABC_2 háromszögé pedig $S_2\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$.

(ESZÉV 2018.10/2)

a) Az egyenlet $\left(\frac{1}{5}\right)^x=5$ alakra hozható, melyből $x=-1$. Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozva.

b) Mivel $\frac{\lg 5^x+\lg 5^{-x}}{2}=\frac{x\lg 5-x\lg 5}{2}=0$, ezért $0\le\lg\frac{5^x+5^{-x}}{2}$. A 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért $1\le\frac{5^x+5^{-x}}{2}$, vagyis $2\le 5^x+5^{-x}$. Az 5^x és 5^{-x} pozitív számok egymás reciprokai, ezért összegük legalább 2. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állítás is igaz.

(ESZÉV 2016.05/3)

a) Ha a számtani sorozat első tagja *a*, akkor a 3. tagja $a+3{,}2$ és a 7. tagja $a+9{,}6$. A mértani sorozat tulajdonsága miatt: $(a+3{,}2)^2=a(a+9{,}6)$, amiből $a=3{,}2$. A három szám tehát: 3,2; 6,4 és 12,8. Ellenőrzés: ezek valóban tekinthetők egy (2 kvóciensű) mértani sorozat első három tagjának.

b) Az állítás hamis. Ellenpélda az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergens számsorozat, aminek az értékkészlete végtelen számhalmaz.

c) Megfordítás: Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens. A megfordított állítás hamis. Példa a $\{(-1)^n\}$ sorozat értékkészlete véges, de a sorozat nem konvergens.

(ESZÉV 2020.05/4)

a) A másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív. A diszkrimináns: $(4p+1)^2-4\cdot 2p=16p^2+1$. Ez $p^2\ge 0$ miatt a *p* minden valós értékére pozitív, tehát az állítás igaz.

b) Ha a 3 gyöke az egyenletnek, akkor $9-3(4p+1)+2p=0$, ahonnan $p=0{,}6$. Az egyenlet ezzel az értékkel: $x^2-3{,}4x+1{,}2=0$. A megoldóképletből adódik, hogy a másik valós gyök ekkor 0,4.

c) (A megadott egyenletnek mindig 2 valós gyöke van.) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $x_1+x_2=4p+1$ és $x_1x_2=2p$, ezért $x_1^2+x_2^2=7=(4p+1)^2-2\cdot 2p$. Innen $16p^2+4p-6=0$, melyből $p=-0{,}75$ vagy $p=0{,}5$, így ezek a *p* paraméter keresett értékei.

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/4)

a) $(f\circ g)(x)=(2x+3)^2+1=4x^2+12x+10$.

b) $(g\circ f)(x)=2(x^2+1)+3=2x^2+5$, így $(g\circ f)(1)=7$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$. A feltétel szerint $\left|\frac{2n+3}{n^2+1}-0\right|<0{,}01$. Mivel $n\in\mathbf{N}^+$, ezért $\frac{2n+3}{n^2+1}>0$, így az abszolútérték jel elhagyható, azaz $\frac{2n+3}{n^2+1}<0{,}01$. Innen $n>201{,}484$. Mivel $n>n_0$, ezért $n_0=201$ a megfelelő küszöbindex.