UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV Minta 2017.05/1)

a) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) > -1.$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$(x-2)^2 \cdot |\cos x| = \cos x.$$

(ESZÉV 2020.05/6)

Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

(EFFM 1993-95/95.22/6)

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ feltételt kielégítő valós számok halmazán!

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2 \leq 0$$

(EFFM 1974-76/158/6)

Oldja meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 12 = 0; \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-2} - 16 = 0. \end{cases}$$

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/6)

Bonifác pékmester minden nap 12 órát tölt a műhelyében. Idejének egy részében nehéz fizikai munkát végez, a fennmaradó időben pihen. Saját becslése szerint a naponta elkészített péksütemények $M(t)$ számát a munkavégzésre fordított *t* óra függvényében jó közelítéssel adja meg a következő képlet: $M(t) = t^2(12-t)$. A napi 12 órából mennyi időt fordítson a mester fizikai munkára, illetve pihenésre, hogy a lehető legtöbb péksüteményt tudja elkészíteni?

(ESZÉV 2012.10/8)

Derékszögű koordináta-rendszerben az *ABC* háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Adja meg a *p* paraméter pontos értékét, ha a háromszög *B* csúcsánál levő belső szöge 60°-os!

(ESZÉV Minta (1) 2015.10/8)

A valós számok halmazán értelmezett *f*, *g* és *h* függvényekről a következőket tudjuk:

I. A *g* és *h* elsőfokú függvények képei egymásra merőleges egyenesek.
II. A két egyenes az *y* tengelyt a $(0;3)$ pontban metszi.
III. A $g \circ h$ függvény zérushelye $x = 9$.

A $g \circ h$ összetett függvény definíciója: $(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big)$.

a) Adja meg a *g* és *h* függvények hozzárendelési szabályát, és igazolja, hogy az $f = g \cdot h$ függvény hozzárendelési szabálya $f: x \mapsto -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$!

b) Adja meg az *f* függvény $x = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintőjének az egyenletét!

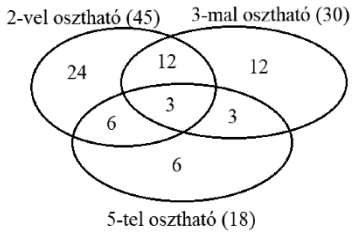
Megoldások:

(ESZÉV (Minta) 2017.05/1)

a) Értelmezési tartomány: $-2 < x < 2$. Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt a $\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2) > \log_{\frac{1}{3}} 3$ egyenlőtlenségből $4-x^2 < 3$, melyből (az értelmezési tartománnyal összevetve): $x \in]-2;-1[\cup]1;2[$.

b) Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ha $\cos x > 0$, azaz $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor az $(x-2)^2 = 1$ egyenlet (megfelelő gyöke) az $x = 1$. Ha $\cos x < 0$, azaz $\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, akkor a $(x-2)^2 = -1$ egyenletet kell megoldanunk, melynek azonban nincs gyöke.

(ESZÉV 2020.05/6)



Venn-diagramon szemléltetjük az egyes halmazokat és azok elemszámát. A 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható 90-nél nem nagyobb pozitív egészek száma a Venn-diagram alapján: $24 + 12 + 6 = 42$.

(EFFM 1993-95/95.22/6)

Az egyenlőtlenség $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 \leq 0$ alakra hozható. Innen $-\sqrt{3} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, de a cos függvény korlátossága miatt: $-1 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ebből $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$ vagy $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(EFFM 1974-76/158/6)

Az egyenletrendszer a $2^x = a$ és a $2^{x+y} = b$ helyettesítéssel az $5a - b = -12$ és $24a - b = 64$ alakra hozható. Ennek a megoldásai: $a = 4$ és $b = 32$, melyből $x = 2$ és $y = 3$.

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/6)

Az $M(t) = t^2(12-t) = -t^3 + 12t^2$ függvény maximumát keressük, ha $0 < t \leq 12$. A függvény deriváltja: $M'(t) = -3t^2 + 24t$, zérushelyei $t_1 = 0$ (nem megoldás) és $t_2 = 8$. A deriváltfüggvény $t_2 = 8$-ban előjelet vált (pozitívból negatívba), így ezen a helyen maximum van. Bonifác mesternek tehát 8 órát érdemes fizikai munkával töltenie, és 4 órát pihenéssel.

(ESZÉV 2012.10/8)

Felírva a háromszög oldalait $AB^2 = 50$, $BC^2 = p^2 + 8p + 32$ és $AC^2 = p^2 - 2p + 82$. A háromszög *AC* oldalára felírva a koszinusztételt: $p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 82 - 2\sqrt{50} \cdot \sqrt{p^2 + 8p + 32} \cdot \cos 60°$. Rendezve $\sqrt{50(p^2 + 8p + 32)} = 10p$ (észrevehető, hogy mivel a bal oldal pozitív, ezért $p > 0$), melyből $p^2 - 8p - 32 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei: $p = 4 \pm 4\sqrt{3}$. Mivel $p > 0$, ezért $p = 4 + 4\sqrt{3}$.

(ESZÉV Minta (1) 2015.10/8)

a) I. miatt a két egyenes meredekségének szorzata –1. (Egyik egyenes sem párhuzamos a koordinátatengelyekkel.) I. és II. miatt $g(x) = mx + 3$, $h(x) = -\frac{1}{m}x + 3$. $(g \circ h)(x) = m \cdot \left(-\frac{1}{m}x + 3\right) + 3 = -x + 3m + 3$. III.-ból $-x + 3m + 3 = 0$, ha $x = 9$. Innen $-9 + 3m + 3 = 0$, azaz $m = 2$. Így *g* és *h* hozzárendelési szabálya tehát: $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ és $f(x) = g \cdot h = (2x+3)\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = -x^2 + \frac{9}{2}x + 9$, ami az állítás.

b) Az f függvény érintője meredekségének meghatározásához az f függvényt deriváljuk. $f'(x) = -2x + \frac{9}{2}$, $f'(2) = \frac{1}{2}$ (a keresett érintő meredeksége). $f(2) = 14$, így az érintő egyenlete: $y - 14 = \frac{1}{2}(x-2)$, vagy más alakban: $y = \frac{1}{2}x + 13$.