UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV Minta (2) 2004.05/1)
Adja meg az alábbi egyenlet $[2; 5]$ intervallumba eső megoldásait!

$$4^{x+1,5} - 14 \cdot 2^{x+2} = -96.$$

(EFFM 1993-95/93.12/4)
Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja $A(-2; 2)$, másik végpontja a *B* pont, amelynek ordinátája 4. Az egyik befogó egyenlete $x + y = 10$. Számítsa ki az átfogóhoz tartotó magasság hosszát!

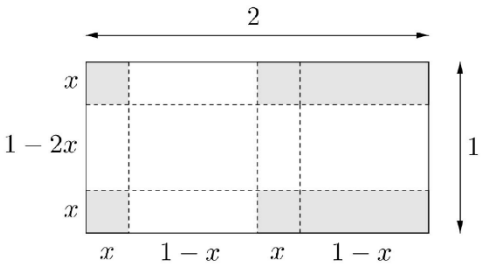
(ESZÉV 2008.05/6)
a) Értelmezzük a valós számok halmazán az *f* függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel, ahol *k* valós paraméter!

- Számítsa ki, hogy *k* mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek!
- Állapítsa meg, hogy az így kapott *k* esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!
- Igazolja, hogy a *k* ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is!

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett *g* függvény inflexiós pontját!

(EFFM 1993-95/94.22/6)
Két, pozitív számokból álló mértani sorozatban az első elemek egyenlők; az első sorozat minden további eleme nagyobb a második sorozat ugyanolyan sorszámú eleménél, mégpedig a második elemek különbsége 2, a harmadik elemek különbsége 10, a negyedik elemek különbsége 38. Írja fel a sorozat első négy-négy elemét!

(ESZÉV 2014.10/7)
Egy üzemben fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter × 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen?



(EFFM 1999-01/99.23/7)
Anna két évre *p*%-os évi kamatra pénzt ad kölcsön. Kata megkérdezte tőle, hogy mekkora a *p*. Anna válasza: „ha 11%-kal kevesebb kamatot kértem volna, akkor 21%-kal több pénzt kellett volna kölcsönadnom, hogy két év múlva ugyanakkora összeget kapjak vissza, mint a jelenlegi feltételek mellett”. Számítsa ki *p* értékét!

(EFFM 1992-94/31/7)
Mely valós *x*-ekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség?

$$4\sin^2 x - 4|\cos x| < 1.$$

Megoldások:

(ESZÉV Minta (2) 2004.05/1)
Az egyenlet $2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$ alakra hozható, ami 2^x-re másodfokú. Ennek az egyenletnek a megoldásai: $2^x = 4$ vagy $2^x = 3$. Innen $x_1 = 2$ és $x_2 = \log_2 3 \approx 1{,}585$. A megadott intervallum miatt az egyenlet megoldása: $x = 2$.

(EFFM 1993-95/93.12/4)
Mivel a *B* pont illeszkedik az adott befogóra, így a *B* pont abszcisszája 6, és így $AB = \sqrt{68}$. Az *A* pontból az adott befogóra merőlegest állítva a *C* pont koordinátái $(3; 7)$. Innen a háromszög befogói: $AC = 5\sqrt{2}$ és $BC = 3\sqrt{2}$, az átfogóhoz tartozó magasság: $m = \frac{15}{\sqrt{17}} \approx 3{,}64$.

(ESZÉV 2008.05/6)
a) Az *f* függvénynek az $x = 1$ akkor lehet szélsőérték-helye, ha itt az első deriváltja nulla. Mivel $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9$, ezért $f'(1) = 3 + 2k + 9 = 0$. Innen $k = -6$. A lehetséges *k* értékre: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$. Az $x = 1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált át, ezért itt az *f* függvénynek lokális maximuma van. A derivált az $x = 3$ helyen negatívból pozitívba vált át, ezért itt az *f* függvénynek lokális szélsőértéke (minimuma) van.

b) Mivel $g'(x) = 3x^2 - 18x$, ebből $g''(x) = 6x - 18$. A második derivált zérushelye $x = 3$. Itt a második derivált előjelet vált. A g függvény (egyetlen) inflexiós pontja az $x = 3$.

(EFFM 1993-95/94.22/6)
A két sorozat a feltételek miatt $a;\ aq; aq^2; aq^3$ és $a;\ aq - 2; aq^2 - 10; aq^3 - 38$. Ezekből az $\frac{aq-2}{a} = \frac{aq^2-10}{aq-2}$ és $\frac{aq-2}{a} = \frac{aq^3-38}{aq^2-10}$ egyenletek írhatóak fel. A két egyenletből $q = \frac{5a+2}{2a}$ és $aq^2 + 5aq - 19a - 10 = 0$. Innen $a = \pm 2$ és ebből $a = 2$ felel meg. Ezt felhasználva $q = 3$. A keresett két sorozat tehát: 2, 6, 18, 54 és 2, 4, 8, 16.

(ESZÉV 2014.10/7)
Az ábra jelöléseit használva a térfogat (m^3-ben): $V(x) = x(1 - x)(1 - 2x) = 2x^3 - 3x^2 + x$, ahol $0 < x < 0{,}5$. Keressük a $V(x)$ függvény maximumát. $V'(x) = 6x^2 - 6x + 1$. A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $V'(x) = 0$. A másodfokú egyenlet (valós) megoldásai: $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}211$ és $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}789$. Ez utóbbi nem eleme a *V* értelmezési tartományának, ezért ez nem jöhet szóba. Az x_1 helyen V' előjelet vált (pozitívból negatívba), ezért ez a *V* függvénynek az egyetlen szélsőértékhelye, mégpedig a maximumhelye. A maximális térfogatú doboz méretei (a kért kerekítéssel): 21, 79 és 58 (cm).

(EFFM 1999-01/99.23/7)
A kölcsönadott tőke legyen *t*. Ez *p*%-os évi kamat mellett 2 év alatt $t \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ értékre növekedik fel. A 21%-kal nagyobb tőke $t \cdot 1{,}21$. Ennek 2 év alatt $(p - 11)$%-os kamatláb mellett a felnövekedett értéke $t \cdot 1{,}21 \cdot \left(1 + \frac{p-11}{100}\right)^2$. A feladat szerint a két felnövekedett tőke egyenlő egymással. Innen $p = 21$ (vagy $p \approx -94{,}24$, ami nem ad megoldást), azaz Anna 21%-os kamatra adta kölcsön a pénzt.

(EFFM 1992-94/31/7)
Alkalmazva a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ és az $a^2 = |a|^2$ azonosságokat az egyenlőtlenség a következő alakú: $4|\cos x|^2 - 4|\cos x| - 3 > 0$, ami $|\cos x|$-re másodfokú. Innen $|\cos x| < -\frac{3}{2}$ vagy $|\cos x| > \frac{1}{2}$, melyből csak a második teljesülhet. Ennek $\cos x > \frac{1}{2}$ vagy $\cos x < -\frac{1}{2}$ lesz a megoldása. A két egyenlőtlenség megoldásának metszete: $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.