UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2012.05/1)
Egy háromszög a, b és c oldalairól tudjuk, hogy $c = 2b$; $a^2 + b^2 = 4$ és $a^2 - b^2 = 2$.

a) Mekkorák a háromszög oldalai?
b) Mekkorák a háromszög szögei?
c) Mekkora a beírt körének sugara?

Az eredmények pontos értékét adja meg!

(EFFM 1999-01/99.42/2)
A $3\lg^2 x + a\lg x = b$ egyenletnek egyetlen valós gyöke van, az $x = 10$. Határozza meg az a és b valós paraméterek értékét!

(EFFM 1993-95/93.21/5)
Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$(\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x.$$

(ESZÉV 2009.05/5)
Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az **a)** és **b)** jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a **c)** és **d)** jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

$a)\ \dfrac{2x^2 + x - 10}{2^{x-1} - 2} = 0.$ $\qquad b)\ \sqrt{x+16} + \sqrt{x-9} = 5.$

$c)\ \lg(x^2 + x - 6) = \lg(1 - x^2)\,.$ $\qquad d)\ \sin x - 1 = \sqrt{\lg(\cos^2 x - 1{,}5\cos x)}.$

(ESZÉV 2010.10/7)
Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0{,}03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13\,000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?
b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? *(nyereség=bevétel–kiadás)*

(ESZÉV Minta (1) 2015.10/6)
Enikő három különböző pozitív számra gondolt, és ezekről az alábbi információkat árulta el:

A) A számok tekinthetők egy növekvő számtani sorozat három szomszédos tagjának.
B) A három szám közül a legnagyobb és a legkisebb tag köbének összege 1072.
C) A legnagyobb és a legkisebb tag négyzetének különbsége éppen 32-szerese a számtani sorozat differenciájának.

Határozza meg a három számot!

Megoldások:

(ESZÉV-NY 2012.05/1)

a) A második két egyenlet által alkotott egyenletrendszerből kiszámolható a és b értéke: $a = \sqrt{3}$ és $b = 1$, majd ezekből $c = 2$. A háromszög oldalai $\sqrt{3}$; 1 és 2 egység hosszúságúak.

b) Mivel $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$, a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján a háromszög derékszögű, a leghosszabb oldallal, *c*-vel szemben, így $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ és $\gamma = 90°$.

c) A beírt kör sugara a terület és a kerület felének hányadosa, azaz $r = \frac{t}{\frac{k}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(EFFM 1999-01/99.42/2)

Mivel $\lg 10 = 1$, ezért $x = 10$-et az egyenletbe (x helyére) behelyettesítve $3 + a = b$. Minthogy az egyenlet $\lg x$-ben másodfokú, ezért akkor lesz egyetlen gyök, ha az egyenlet diszkriminánsa 0, azaz $a^2 + 12b = 0$. Innen $a = -6$ és $b = -3$. Ellenőrzéssel belátható, hogy ezekkel a paraméterekkel az eredeti egyenletnek valóban egyetlen gyöke lesz, ami az $x = 10$.

(EFFM 1993-95/93.21/5)

Az egyenlet nem értelmezhető, ha $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ vagy $x = (2l+1)\frac{\pi}{4}$, ahol $k, l \in \mathbf{Z}$. Az egyenlet a $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3) = 0$ alakra hozható. Innen $\operatorname{tg} x = 0$ vagy $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$, melyekből az eredeti egyenletet is kielégítő gyöksorozatok: $x_1 = m\pi$ és $x_2 \approx 1{,}89 + n\pi$, ahol $m, n \in \mathbf{Z}$.

(ESZÉV 2009.05/5)

a) A nevező nem lehet 0, ezért $x \neq 2$. Az egyenlet akkor lesz 0, ha a számláló 0, innen az egyetlen megoldás az $x = -2{,}5$.

b) Az egyenlet csak az $x \geq 9$ számokra teljesülhet. Az egyenletet megoldva $x = 9$. Behelyettesítéssel ellenőrizve adódik, hogy ez gyöke az eredeti egyenletnek is.

c) A logaritmusokra tett kikötések szerint $x < -3$ vagy $x > 2$ és $-1 < x < 1$, melyeknek nincs közös része, így az egyenletnek nincs megoldása.

d) A jobb oldali kifejezés értéke az értelmezési tartományán csak nemnegatív lehet, így a baloldal is, azaz $\sin x - 1 \geq 0$, melyből $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Erre az értékre azonban a jobboldali kifejezésben a logaritmus numerusa 0 lenne, ami nem értelmezett, így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, tehát nincs megoldása.

(ESZÉV 2010.10/7)

a) Az eladásból származó havi bevétel: $x(36 - 0{,}03x) = -0{,}03x^2 + 36x$. Keressük az előbbi másodfokú kifejezés maximumát, ami $x = 600$. Ez az érték a feltételek szerinti intervallumba tartozik. A legnagyobb bevételt tehát 600 kg termék értékesítése esetén érik el, a legnagyobb bevétel 10 800 euró.

b) A havi nyereség a havi bevétel és havi kiadás különbségével egyenlő. A havi nyereséget az $x \mapsto -0{,}03x^2 + 36x - (0{,}0001x^3 - 30{,}12x + 13\,000) = -0{,}0001x^3 - 0{,}03x^2 + 66{,}12x - 13\,000$ függvény adja meg, ahol $x \in]100; 700[$. Ez a függvény deriválható, és deriváltja az $x \mapsto -0{,}0003x^2 - 0{,}06x + 66{,}12$ függvény. A deriváltfüggvénynek (előjelvizsgálattal indokolva) egy abszolút maximumhelye van és ez 380 (kg). A legnagyobb havi nyereség tehát 380 kg termék eladása esetén keletkezik, értéke 2306,4 euró.

(ESZÉV Minta (1) 2015.10/6)

Jelölje a három számot $a - d, a, a + d$, ahol $a, d > 0$, Ekkor $(a+d)^3 + (a-d)^3 = 1072$ és $(a+d)^2 - (a-d)^2 = 32d$. Az első egyenletből $a^3 + 3ad^2 = 536$, a másodikból $4ad = 32d$, így $a = 8$ ($d \neq 0$ miatt). Ezt az elsőbe helyettesítve $512 + 24d^2 = 536$ adódik, melyből $d = -1$ (ami nem lehetséges) vagy $d = 1$. A három szám tehát 7, 8, 9.