UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2014.05/1)
Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm^2?

(ESZÉV-NY 2010.05/3)
Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára *annyiszor 400 Ft-tal* csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

a) Adja meg annak a B függvénynek az $x \mapsto B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?
b) Hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

(ESZÉV 2010.05/3)
Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?

(EFFM 1974-76/5/5)
Az x kiszámítása nélkül határozza meg $\operatorname{tg}^2 x$ pontos értékét, ha $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sin x$!

(ESZÉV 2014.10/7)
Egy növekvő számtani sorozat első három tagjából álló adathalmaz szórásnégyzete 6.

a) Igazolja, hogy a sorozat differenciája 3-mal egyenlő!

András, Barbara, Cili, Dezső és Edit rokonok. Cili 3 évvel idősebb Barbaránál, Dezső 6 évvel fiatalabb Barbaránál, Edit pedig 9 évvel idősebb Cilinél. Dezső, Barbara és Edit életkora (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagja, András, Barbara és Cili életkora (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat három szomszédos tagja.

b) Hány éves András?

(ESZÉV Minta (3) 2004.05/9)
Az $x^3 + 2x^2 + cx + y + d = 0$ egyenlettel megadott grafikonról tudjuk, hogy az origóban érinti az x tengelyt.

a) Határozza meg a c és d valós paraméterek értékét!
b) Határozza meg a $x \mapsto -x^3 - 2x^2$ ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) függvény menetét és szélsőértékeit!
c) A zérushelyek megállapítása után ábrázolja a fenti függvényt!

Megoldások:

(ESZÉV 2014.05/1)

Egy kis téglalap oldalainak a hossza *x* cm, illetve $x+1$ cm, területe $x(x+1)$ cm^2. A feladat szövege szerint: $720 \cdot x \cdot (x+1) = 2025$, melyből $x_1 = -2{,}25$ és $x_2 = 1{,}25$. A negatív gyök nem megoldása a feladatnak. A téglalap oldalai 1,25 cm és 2,25 cm.

(ESZÉV-NY 2010.05/3)

a) $B(x) = \begin{cases} 16\,000x, & \text{ha } 10 \le x \le 20 \ (x \text{ egész}) \\ 16\,000x - 400(x-20)x = 400x(60-x), & \text{ha } 20 < x \le 36 \ (x \text{ egész}) \end{cases}$.

Az értelmezési tartomány: $x \in \mathbf{N}$ és $10 \le x \le 36$.

b) Ha $x \in [10;20]$, akkor $x = 20$ és $B(20) = 320\,000$, ha $x \in]20;36]$, akkor $x = 30$ és $B(30) = 360\,000$ a maximum. Így a bevétel 30 utas esetén lesz maximális, mert $B(20) < B(30)$, és a maximum 360 000 Ft.

(ESZÉV 2010.05/3)

Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa q. A feltétel szerint: $a + aq + aq^2 = 91$ és $aq^5 + aq^6 + aq^7 = 2912$, melyből: $q = 2$ és $a = 13$. Így a mértani sorozat: $a_n = 13 \cdot 2^{n-1}$. A kérdés: hány *n*-re igaz, hogy $10^{12} \le 13 \cdot 2^{n-1} < 10^{13}$. Innen: $37{,}16 \le n < 40{,}48$. Ennek egész megoldása a 38, a 39 és a 40, azaz a sorozatnak három tagja lesz tizenhárom jegyű.

Megjegyzés: Az egyenlőtlenség megoldása helyett *n* meghatározására számológépes próbálkozással is elfogadható, ha utalunk a sorozat szigorúan monoton növekedésére és 37-től 41-ig végzünk próbákat.

(EFFM 1974-76/5/5)

Mivel $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, ezért $\cos^2 x$ meghatározása a feladat. Az eredeti összefüggés mindkét oldalát négyzetre emelve és a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítéssel a $\cos^2 x + \cos x - \frac{3}{2} = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $\cos x = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$, illetve $\cos x = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$. Mivel $\cos x \in [-1;1]$, ezért a második érték nem megoldása az egyenletnek. Az első értékkel számolva $\cos^2 x = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$, és így $\operatorname{tg}^2 x = \frac{2\sqrt{7}-1}{9}$.

(ESZÉV 2014.10/7)

a) Legyen a sorozat első három tagja $a_2 - d$, a_2, $a_2 + d$. A tagok átlaga: a_2, szórásnégyzete: $\frac{(a_2-d-a_2)^2+0^2+(a_2+d-a_2)^2}{3} = 6$. Ebből $d^2 = 9$, és mivel a sorozat növekedő, ezért $d = 3$.

b) Ha Barbara *x* éves, akkor Cili $x+3$, és így Dezső, Barbara és Edit rendre $x-6$, x, illetve $x+12$ év. Mértani közép tulajdonság szerint: $(x-6)(x+12) = x^2$, melyből $x = 12$. András tehát 9 éves (mert 3 évvel fiatalabb Barbaránál).

(ESZÉV Minta (3) 2004.05/9)

a) A függvény grafikonja átmegy az origón, ezért a $(0;0)$ pont illeszkedik rá, behelyettesítve $d = 0$. Mivel az *x* tengely érinti a függvényt a $(0;0)$ pontban, ezért ebben a pontban $y'(0) = 0$, innen $c = 0$.

b) A függvényvizsgálatot az első derivált segítségével végezzük el:

$y' = -3x^2 - 4x = 0$, melyből $x = 0$ és $-\frac{4}{3}$.

c) A függvény zérushelyei: –2 és 0. A függvény grafikonja derékszögű koordináta-rendszerben:

	$x < -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
y'	–	0	+	0	–
y	csökkenő	lokális minimum értéke: $-\frac{32}{27}$	növekvő	lokális maximum értéke: 0	csökkenő

