UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2019.10/1)
Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a $d\colon [5;20] \to \mathbf{R}$, $d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol *x* a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?
b) Hány dm^2-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter?

(ESZÉV 2019.10/2)
Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$a)\ \cos x \geq \frac{1}{2}.$ $\qquad$ $b)\ \sqrt{\frac{x}{5} - 4} < 20.$

c) Hány olyan egész szám van, amelyik gyöke az alábbi egyenlőtlenségnek?

$$\log_{0,5}(2x + 100) \geq -8.$$

(ESZÉV-NY 2006.05/2)
Adott egy kék és egy piros kocka. A piros kocka felszíne 25%-kal kisebb, mint a kék kocka felszíne. Hány százalékkal kisebb a piros kocka térfogata, mint a kék kocka térfogata?

(EFFM 1999-01/99.36/4)
Egy háromszög oldalai 16 cm, 30 cm és 34 cm. A csúcsok köré köröket írunk úgy, hogy a három kör kívülről érintse egymást. Mekkora a három kör közé – a háromszög belsejébe eső – zárt síkidom kerülete és területe?

(ESZÉV-NY 2006.05/6)
Adottak az $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2 + 10x - 22$ és a $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvények.

a) Oldja meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet!
b) Írja fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = f(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét!
c) Ábrázolja az *f* és a *g* függvény grafikonját! Számítsa ki az $y = f(x)$, $y = g(x)$ egyenletű grafikonok és az $x = 6$ egyenletű egyenes által közrefogott, az *y* tengelyhez közelebbi síkidom területét!

(ESZÉV 2017.10/7)
A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indított: az akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél. Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg!

Megoldások:

(ESZÉV 2019.10/1)

a) $d(10) = 215$, azaz a törzs átmérője 21,5 cm.

b) A törzs átmérője a 11. év végén kb. 230 mm. A keresztmetszet gyarapodását az $r_{11} \approx 115$ mm és $r_{10} \approx 107{,}5$ mm sugarú körök által határolt körgyűrű területe adja meg. Ennek nagysága $r_{11}^2\pi - r_{10}^2\pi \approx 5200$ mm^2, ami a kért kerekítéssel 0,5 dm^2.

c) Ha a törzs kerülete 1000 mm, akkor átmérője kb. 318 mm. $d(x) = -0{,}25x^2 + 20x + 40 = 318$, innen $x_1 \approx 17{,}9$ és $x_2 \approx 62{,}1$. Mivel $x_2 > 20$ nem megfelelő, a fa kb. 18 éves.

(ESZÉV 2019.10/2)

a) $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

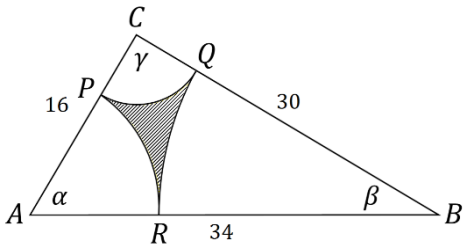
b) Értelmezési tartomány: $x \ge 20$. Négyzetre emelés után (az értelmezési tartományon ekvivalens átalakítás): $x < 2020$. Az egyenlőtlenség megoldása: $20 \le x < 2020$.

c) Értelmezési tartomány: $x > -50$. $\log_{0,5}(2x + 100) \ge \log_{0,5} 256$. A 0,5 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért $2x + 100 \le 256$, melyből $x \le 78$. Az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldása: $-50 < x \le 78$. Az egyenlőtlenségnek így 128 egész megoldása van.

(ESZÉV-NY 2006.05/2)

Legyen a piros kocka felszíne $6a^2$, a kék kockáé $6b^2$. A feltétel alapján $6a^2 = \frac{3}{4} \cdot 6b^2$, melyből $a, b > 0$ felhasználásával: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Így a piros kocka térfogata a kék kocka térfogatával kifejezve: $a^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}b^3$. Mivel $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}65$, ezért a piros kocka térfogata a kék kocka térfogatának kb. 65%-a. Tehát a piros kocka térfogata kb. 35%-kal kisebb, mint a kék kocka térfogata.

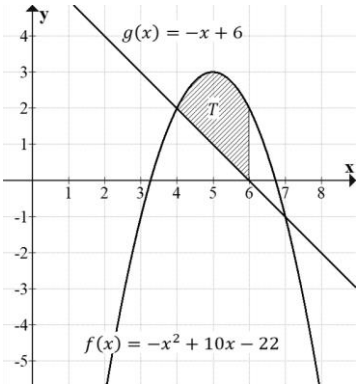
(EFFM 1999-01/99.36/4)



Mivel $16^2 + 30^2 = 34^2$, ezért a Pitagorasz tételének megfordítása miatt a háromszög (*C*-nél) derékszögű. A háromszög szögei 61,93° és 28,07°. Ha az *A* csúcs körül rajzolt kör sugarát *r*-rel jelöljük, akkor a *C* csúcs körül $16 - r$, a *B* csúcs körül $34 - r$ sugarú kör rajzolható. Így $CB = 30 = (16 - r) + (34 - r)$, innen $r = 10$.

A körök sugarai 10 cm; 6 cm és 24 cm. A három körcikk területe 54,04 cm^2; 141,09 cm^2 és 28,27 cm^2, azaz összesen 223,4 cm^2. A háromszög területe 240 cm^2, így a bekerített síkidom területe: $240 - 223{,}4 = 16{,}6$ cm^2, kerülete pedig: 32 cm.

(ESZÉV-NY 2006.05/6)



a) A megoldandó egyenlet: $-x^2 + 10x - 22 = -x + 6$. A megoldások: $x_1 = 4$ és $x_2 = 7$.

b) $f'(x) = -2x + 10$. A metszéspontokba húzható érintők meredeksége: $m_1 = f'(x_1) = 2$ és $m_2 = f'(x_2) = -4$. A grafikonok metszéspontjai: $M_1(4; 2)$, $M_2(7; -1)$. A két érintő egyenlete: $y = 2x - 6$ és $y = -4x + 27$.

c) A síkidom területe: $T = \int_4^6 [f(x) - g(x)]\,dx =$
$= \int_4^6 (-x^2 - 11x - 28)\,dx = \frac{10}{3}$.

(ESZÉV 2017.10/7)

A térfogat 20%-os növekedése 1,2-szeres változást jelent. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, így az arány $\sqrt[3]{1{,}2} \approx 1{,}063$. Ha az eredeti hosszúságot *x* jelöli, akkor $1{,}063x = x + 1$, innen $x = 15{,}9$. Az eredeti szelet hossza a kért kerekítéssel 16 cm.