UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2007.05/1)
Negyven egyetemi hallgató férfi egész kilogrammra kerekített testtömegéről ad tájékoztatást az alábbi táblázat.

tömeg (kg)	53-56	57-60	61-64	65-68	69-72	73-76	77-80
gyakoriság	2	3	4	11	9	6	5

a) A táblázat alapján, az osztályközepek segítségével számítsa ki a 40 hallgató testtömegének átlagát és szórását! (Osztályközép: az osztály alsó és felső határának számtani közepe.)

Péter – az egyik hallgató – öt érdemjegyet szerzett statisztika tantárgyból az előző félévben. Jegyeinek mediánja a 3, módusza a 2, átlaga pedig 3,2. (Érdemjegy az 1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyike lehet.)

b) Határozza meg Péter öt érdemjegyének az érdemjegyek átlagától számított átlagos abszolút eltérését!

(MFTFH II/I.2.2)
Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

$$f(x) = \lg(1 - 2\cos x).$$

(ESZÉV-NY 2018.05/3)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

$a)\ x^2 - 5x < 50.$ $b)\ \log_3(x^2) - \log_9(81x) \leq 1.$

(EFFM 1996-98/96.12/4)
Egy egyenes hengert a tengelyével párhuzamos síkkal elmetszünk. A síkmetszet területe 96, a tengelyektől való távolsága 3, a hengerpalást területe 120π. Mekkora a henger sugara és a magassága?

(ESZÉV-NY 2007.05/7)
a) Számítsa ki az *a*, *b* és *c* értéket, ha az $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x, a, b, c \in \mathbf{R}$ és $a \neq 0)$ függvényről tudjuk, hogy $f'(2) = 6$ és $f'(6) = 2$, valamint $\int_0^2 f(x)dx = \frac{50}{3}$.

b) Határozza meg annak a $P(0; 35)$ ponton átmenő egyenesnek az egyenletét, amely érinti az $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x + 3$ egyenletű parabolát!

(ESZÉV 2009.10/8)
Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja: $C(0; 7)$, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (*A* és *B*) illeszkedik az $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az *A* és a *B* pont koordinátáit!
b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja *D*. Határozza meg a *D* pont koordinátáit!
c) Mekkora területű részekre bontja az *ABC* háromszöget a parabola íve?

Megoldások:

(ESZÉV-NY 2007.05/1)

a) Az osztályközepek (kilogrammban) rendre: 54,5; 58,5; 62,5; 66,5; 70,5; 74,5; 78,5. Ezekkel számolva az átlag: 68,5 (kg), a szórás: 6,39 (kg).

b) Az öt jegy összege 16. (Mivel a mediánnál legfeljebb két kisebb jegy lehet, így) két darab 2-es van, ezért az öt jegy 2, 2, 3, 4, 5 (lehetett csak). Az átlagos abszolút eltérés: 1,04.

(MFTFH II/I.2.2)

A logaritmus miatt $1-2\cos x>0$, így az értelmezési tartomány: $\frac{\pi}{3}+k2\pi<x<\frac{5\pi}{3}+k2\pi$, ahol *k* egész szám. A belső függvény az előbbi intervallumon minden értékét felveszi, azaz $0<1-2\cos x\leq 3$, továbbá ezen az intervallumon a logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, így a $\lg(1-2\cos x)$ függvény értékkészlete a $]-\infty;\lg 3]$ intervallum.

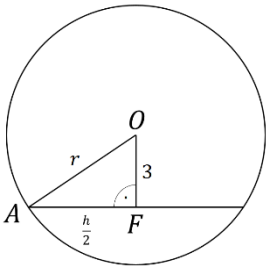
(ESZÉV-NY 2018.05/3)

a) Nullára rendezve: $x^2-5x-50<0$, melyből az egyenlőtlenség megoldása $-5<x<10$.

b) Értelmezési tartomány: $x>0$. Az egyenlőtlenség $\log_3 x\leq 2\ (=\log_3 9)$ alakra hozható. A 3-as alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt $x\leq 9$. Az értelmezési tartománnyal összevetve: $0<x\leq 9$.

(EFFM 1996-98/96.12/4)

Az adott metszet olyan téglalap, amelynek oldalai a henger *m* magassága és az alapkör *h* húrja. A síkmetszet területe $hm=96$, a hengerpalást területe $2r\pi m=120\pi$, vagyis $rm=60$. A két egyenletből a húr hossza: $h=1{,}6r$. Ezt felhasználva *AFO* háromszögben Pitagorasz-tétellel $\left(\frac{h}{2}\right)^2+9=r^2$. Innen a henger sugarára 5 adódik, így a magasság 12.



(ESZÉV-NY 2007.05/7)

a) Mivel $f'(x)=2ax+b$, ezért $4a+b=6$ és $12a+b=2$. Az egyenletrendszer megoldásai: $a=-0{,}5$ és $b=8$. Ezt felhasználva $\int_0^2 f(x)dx=\frac{44}{3}+2c=\frac{50}{3}$, melyből $c=1$.

b) A $P(0;35)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x=0$ egyenletű egyenes nem érinti a parabolát (mert párhuzamos a parabola tengelyével). Az érintő egyenlete $y=mx+35$, ami akkor lesz érintő, ha a parabolával alkotott egyenletrendszerből kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0. Innen $m=0$ és $m=16$. Így két érintő van: $y=35$ és $y=16x+35$.

(ESZÉV 2009.10/8)

a) A keresett két csúcs rajta van a $C(0;7)$ középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2+(y-7)^2=53$ A keresett pontokat az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ és $x^2+(y-7)^2=53$ egyenletrendszer adja. Innen a keresett csúcsok koordinátái: $A(-2;0)$ és $B(2;0)$.

b) *BC* egyenes egyenlete: $7x+2y=14$. A pont *D* koordinátáit az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ és $7x+2y=14$ görbék *B*-től különböző metszéspontjai adják. Innen $D(12;-35)$.

c) Az *ABC* háromszög területe $\frac{AB\cdot m_c}{2}=14$. A parabola két részre osztja a háromszöget. A kisebbik rész területe: $2\cdot\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx=\frac{8}{3}$, a nagyobbik rész területe: $14-\frac{8}{3}=\frac{34}{3}\approx 11{,}33$ területegység.

