UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1996-98/98.63/1)
Mely valós *x* értékekre értelmezhetők az alábbi kifejezések?

$a)\ \lg\frac{x^2-1}{x}$. $\quad b)\ \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 4^x - 2^x}$. $\quad c)\ \frac{1}{\lg \operatorname{tg} x}$. $\quad d)\ \sqrt{\frac{1}{2}-\cos x}$.

(ESZÉV Minta (2) 2004.05/2)
Egy golyó beszorult egy deszkalapba vágott, kör alakúnak tekinthető lyukba. Szükség lenne a lyuk átmérőjének méretére, de ezt közvetlenül nem tudjuk megmérni. Mérhető azonban a golyó átmérője, amely 56 mm, és az, hogy a golyó 4,8 cm magasan emelkedik ki a deszkalap fölé. Adja meg a lyuk átmérőjét! A számításhoz készítsen ábrát!

(ESZÉV 2019.10/5)
Az egységnyi oldalú, szabályos *ABC* háromszögbe olyan *PQRS* téglalapot írunk, melynek *PQ* oldala az *AB* oldalra illeszkedik, *R* a *BC* oldal pontja, *S* pedig a *CA* oldalé. Határozza meg a *PQRS* téglalap területének maximális értékét!

(EFFM 1974-76/37/5)
Számítsa ki az $x^2+y^2=10$ és az $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ egyenletű körök közös húrja, az *x* tengely és az *y* tengely által alkotott háromszög területét!

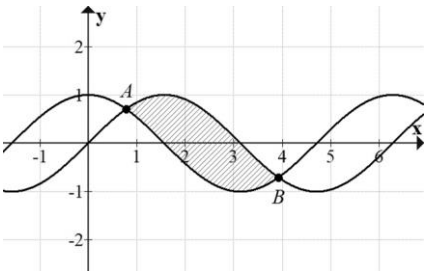
(ESZÉV 2006.10/6)
Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t)=12-\frac{10}{t+1}$ képlet; a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula: $h(t)=5\cdot\sqrt{0{,}4t+1}+0{,}4$. Mindkét formulában *t* az 1969 óta eltelt időt jelöli években ($t\geq 1$), és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagramon, amely a magasság értékeket az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket!

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot?

c) Indokolja meg, hogy nem lehet olyan fa az említett arborétumban, amelynek magasságát a $g(t)=t^3-16{,}5t^2+72t+60$ képlet írja le! (A magasságot centiméterben számolják, *t* az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t\leq 21$.)

(ESZÉV Minta (2) 2015.10/9)
Az ábrán egy cég ún. „csepp” logója látható (satírozott rész). Ezt az alakzatot a grafikonon látható *A* és *B* pontok közötti $a(x)=\sin x$ és $b(x)=\cos x$ függvénygörbék határolják.



a) Határozza meg az *A* és a *B* pont koordinátáit!

b) Mekkora a logó területe, ha a koordináta-rendszerbeli 1 egység a valóságban 3 cm-nek felel meg?

Megoldások:

(EFFM 1996-98/98.63/1)

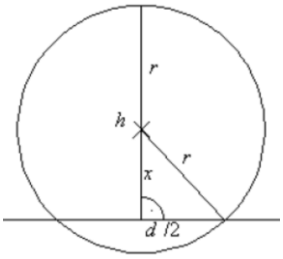
a) $\frac{x^2-1}{x} > 0$, innen a kifejezés értelmezési tartománya: $-1 < x < 0$ vagy $x > 1$.

b) $\frac{1}{2} \cdot 4^x - 2^x \geq 0$, melyből a kifejezés értelmezési tartománya: $x \geq 1$.

c) $\lg \operatorname{tg} x \neq 0$ és $\operatorname{tg} x > 0$, melyekből: $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

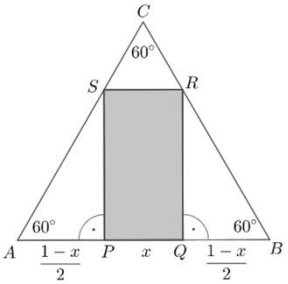
d) $\frac{1}{2} - \cos x \geq 0$, innen az értelmezési tartomány: $\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

(ESZÉV Minta (2) 2004.05/2)



Pitagorasz-tételt alkalmazva $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$, ahol d a lyuk átmérője, r a gömb sugara, h a golyó kiemelkedési magassága ($x = h - r = 20$). Innen a lyuk átmérője $d = 39{,}2$ mm.

(ESZÉV 2019.10/5)



Legyen a PQ szakasz hossza x ($0 < x < 1$), ekkor $AP = QB = \frac{1-x}{2}$, és $PS = QR = \sqrt{3}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$. A $PQRS$ téglalap területét a $T(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ függvény adja meg. A másodfokú függvény maximumhelye a két zérushelyének (0 és 1) számtani közepe: 0,5. Tehát a maximális terület: $T(0{,}5) \approx 0{,}217$.

(EFFM 1974-76/37/5)

A közös húrt egyenletét megkapjuk, ha a két kör egyenletét kivonjuk egymásból, ami így $x + y = 2$. Ez az egyenes a koordinátatengelyekkel egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkot, amelynek befogói 2 egységnyi hosszúak, ezért a keresett háromszög területe 2 területegység.

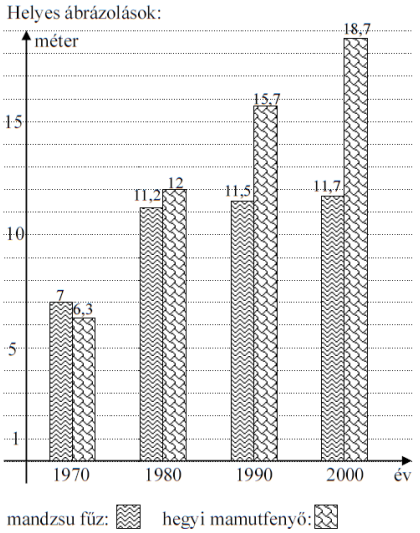
	1970	1980	1990	2000
t	1	11	21	31
$m(t)$	7	11,2	11,5	11,7
$h(t)$	6,3	12,0	15,7	18,7

(ESZÉV 2006.10/6)

a) Táblázatba foglaljuk a képletek által kiszámított magasságokat az eltelt évek függvényében:

b) A kívánt magasságot a mamutfenyő a 8. évben, vagyis 1977-ben érte el.

c) A megadott függvény menetét a derivált előjelvizsgálatával állapítjuk meg. $g'(t) = 3t^2 - 33t + 72$. A derivált értéke 0, ha $t = 3$ vagy $t = 8$. A derivált mindkét nullhelyénél előjelet vált, a két nullhely közötti t értékekre a derivált negatív, ezért a $g(t)$ függvény ezen a tartományon ($3 < t < 8$) szigorúan monoton csökkenő. A fa magassága nem csökkenhet az arborétumban, ezért a $g(t)$ függvény egyetlen fa növekedését sem írhatja le.



(ESZÉV Minta (2) 2015.10/9)

a) Ha $\sin x = \cos x$, akkor $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, így $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $B\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) A területet a különbségfüggvény integrálja adja meg (az adott intervallumon $a(x) \geq b(x)$): $T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [a(x) - b(x)]\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$ (területegység). Háromszoros nagyítás során a terület kilencszeresére nő, így a „csepp” logó területe: $2\sqrt{2} \cdot 9 = 18\sqrt{2} \approx 25{,}5$ (cm^2).