UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

***(ESZÉV 2009.05/05/1)***

Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\sqrt{2}$ egység.

*a)* Mekkora szöget zár be a testátló az alaplap síkjával?
*b)* Hány területegység a hasáb felszíne? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!)
*c)* Az alapél és a testátló hosszát - ebben a sorrendben – tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ezen sorozat második tagja!

***(ESZÉV-NY 2019.05/1)***

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

$a)$ $2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0.$ $b)$ $4\sin^3 x - \sin x = 0.$

***(ESZÉV 2007.05/2)***

Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 18 cm, a *CA* befogójának hossza 6 cm.

*a)* Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

A *BC* befogó egy *P* belső pontját összekötjük az *A* csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

*b)* Milyen hosszú a *PB* szakasz?

Állítsunk merőleges egyenest az *ABC* háromszög síkjára a *C* pontban! A merőleges egyenes *D* pontjára teljesül, hogy *CD* hossza 15 cm.

*c)* Mekkora az *ABCD* tetraéder térfogata?

***(ESZÉV 2017.05/4)***

Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

*a)* Számítsa ki a parabola és az *x* tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!
*b)* Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!
*c)* Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

***(ESZÉV-NY 2008.05/5)***

András és Béla egy magaslati edzőtáborban minden reggel 10 km-t fut: 5 km-t hegynek felfelé a hegycsúcsig, majd megállás nélkül 5 km-t ugyanazon az úton vissza a táborig. Egyik nap András reggel 10 perccel hamarabb indult Bélánál, és felfelé 15 km/h, lefelé 20 km/h sebességgel futott. Béla sebessége ezen a reggelen felfelé 16 km/h, lefelé 22 km/h volt. Futás közben a hegycsúcstól milyen távol találkoztak egymással ezen a reggelen?

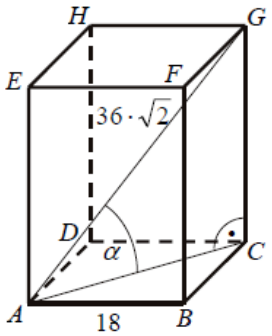
***(ESZÉV 2007.10/6)***

Adott az $f: ]-1; 6[ \to \mathbf{R}, f(x) \mapsto -4x^3 + 192x$ függvény.

*a)* Határozza meg *f* zérushelyeit, és elemezze az *f* függvényt monotonitás szempontjából!
*b)* Jelölje *c* az *f* értelmezési tartományának egy pozitív elemét. Határozza meg a *c* értékét úgy, hogy az *x* tengely $[0; c]$ szakasza, az $x - c = 0$ egyenletű egyenes és az *f* grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen!

***Megoldások:***

***(ESZÉV 2009.05/05/1)***




*a)* Az *ACG* derékszögű háromszögben a $GAC\angle(=\alpha)$ szöget keressük. $\alpha = 60°$.

*b)* A hasáb alapéle $a = 18$, magassága $m = CG = 18\sqrt{6}$, így felszíne: $A = 2a^2 + 4am = 2 \cdot 18^2 + 4 \cdot 18^2 \cdot \sqrt{6} \approx 3822{,}5$.

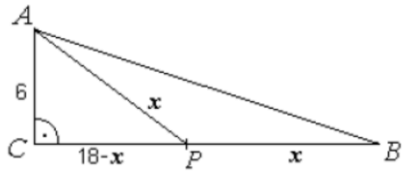
*c)* Ha a mértani sorozat első tagja *a*, hányadosa *q*, akkor $a = AB = 18$ és $aq^3 = AG = 36\sqrt{2}$. Innen $q = \sqrt{2}$. A mértani sorozat második tagja $aq = 18\sqrt{2}$, és ez éppen az alaplap *AC* átlójának hossza.

***(ESZÉV-NY 2019.05/1)***

*a)* $2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 4 \cdot 2^{2x} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$, ami $2^x$-re nézve másodfokú. Innen $2^x = \frac{1}{4}$, melyből $x = -2$, vagy $2^x = -8$, ami nem lehetséges.

*b)* $4\sin^3 x - \sin x = \sin x\,(4\sin^2 x - 1) = 0$, melyből $\sin x = 0$ vagy $\sin x = \pm\frac{1}{2}$. Az első esetben $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, a másodikban $x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$.

***(ESZÉV 2007.05/2)***




*a)* A szokásos jelölésekkel: $\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{18}$, melyből $\beta \approx 18{,}43°$. Ekkor $\alpha = 90° - \beta \approx 71{,}57°$.

*b)* Legyen $PB = PA = x$. *APC* háromszögben Pitagorasz-tétel szerint $6^2 + (18 - x)^2 = x^2$, innen $x = 10$ cm.

*c)* Legyen a tetraéder alapja az *ABC* háromszög, ekkor a testmagasság $CD = 15$ cm. Az *ABC* háromszög területe 54 cm$^2$, a keresett térfogat 270 cm$^3$.

***(ESZÉV 2017.05/4)***

*a)* A függvény zérushelyei: $x_1 = 3$ és $x_2 = 9$. A függvényértékek a két zérushely között negatívak, ezért $T = -\int_3^9 (x^2 - 12x + 27)\,dx = -(0 - 36) = 36$ (területegység).

*b)* Az *E*-ben húzott érintő meredekségét az $f'(5)$ értéke adja meg. $f'(x) = 2x - 12$, így $f'(5) = -2$. Az érintő egyenlete: $y + 8 = -2(x - 5)$.

*c)* $y = (x - 6)^2 - 9$ alakból a parabola tengelypontja $T(6; -9)$, a paraméter $p = 0{,}5$, a fókuszpont $F(6; -8{,}75)$.

***(ESZÉV-NY 2008.05/5)***

András 20 perc, Béla 18,75 perc alatt teszi meg felfelé az utat, ezért a találkozáskor András lefelé, Béla felfelé fut. A két fiú a csúcstól *x* km-re találkozik. Ekkor András futási ideje órában: $\frac{1}{3} + \frac{x}{20}$. Béla futási ideje órában: $\frac{5-x}{16}$. Mivel András 10 perccel korábban indult, ezért $\frac{1}{3} + \frac{x}{20} = \frac{5-x}{16} + \frac{1}{6}$. Innen $x = \frac{35}{27} \approx 1{,}3$ km. A kapott érték a feladat feltételeinek megfelel.

***(ESZÉV 2007.10/6)***

*a)* A $-4x(x^2 - 48x) = 0$ egyenlet $]-1; 6[$ intervallumba eső egyetlen megoldása a 0. A függvény deriváltfüggvénye: $f'(x) = -12x^2 + 192$, zérushelye a $]-1; 6[$ intervallumban a 4. Itt a deriváltfüggvény előjelet vált, mégpedig pozitívból negatívba. Az *f* függvény tehát monoton növekedő a $]-1; 4]$ intervallumon, és monoton csökkenő a $[4; 6[$ intervallumon.

*b)* A $[0; c]$ intervallumon $f(x) \geq 0$, ezért a $\int_0^c (-4x^3 + 192x)dx = 704$ egyenletet kell megoldani a $[0; 6[$ intervallumon. $\int_0^c (-4x^3 + 192x)dx = [-x^4 + 96x^2]_0^c = -c^4 + 96c^2 = 704$. Megoldóképlettel: $c^2 = 8$ vagy $c^2 = 88$. Az értelmezési tartományban az egyetlen pozitív megoldás: $c = \sqrt{8}$.