UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2015.05/1)
Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $\sin x - \cos^2 x = -1.$ *b)* $\big|x - |x|\big| = 2x + 1.$

(ESZÉV 2019.10/5)

a) Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja!
Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.

b) Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$. Számítsa ki a háromszög szögeit!

(ESZÉV 2015.05/5)
Adott az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 1$ és a $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 - 2$ függvény.

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!
b) Számítsa ki az *f* és *g* függvények grafikonja által közbezárt területet!
c) Számítással igazolja, hogy a $h:]-\infty; -0{,}5[\to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

(ESZÉV 2006.10/5)
Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak hány éle, hány csúcsa és hány lapja van?
b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne?
c) Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat: a szobortalapzat kicsinyített mását. Az egyes ajándéktárgyak az alábbi féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készülteket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

(ESZÉV 2016.10/7)
Adott a valós számok halmazán értelmezett *f* és *g* függvény:

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{és} \quad g(x) = 10 + 10x - x^2.$$

Határozza meg azt a *t* valós számot a $[2; 8]$ intervallumban, amelyre teljesül, hogy az *f* függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon.

Megoldások:

(ESZÉV 2015.05/1)

a) Az egyenlet $\sin^2 x + \sin x = 0$ alakra hozható, melynek megoldása: $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$, illetve $x = \frac{3\pi}{2} + l2\pi$, ahol $l \in \mathbf{Z}$.

b) Ha $x \geq 0$, akkor $|x| = x$, ha $x < 0$, akkor $|x| = -x$. Innen az egyenlet $0 = 2x + 1$ vagy $|2x| = 2x + 1$ alakú. Megoldást csak a második esetben kapunk és ez az $x = -\frac{1}{4}$.

(ESZÉV 2019.10/5)

a) A szokásos jelölésekkel legyen például $m_a = m_b$. A háromszög területére: $\frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2}$, amiből $a = b$ következik. A háromszög tehát egyenlő szárú, az állítás igaz.

b) A szinusztétel szerint: $\frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$, melyből $\sqrt{3} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$, azaz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Innen $\alpha = 30°$. A feltétel szerint $\beta = 2 \cdot 30° = 60°$, a harmadik szög pedig 90°-os.

(ESZÉV 2015.05/5)

a) $(2f + g)(x) = 2(2x + 1) + x^2 - 2 = x^2 + 4x$, melynek zérushelyei a 0 és a –4.

b) A kérdéses területet integrálással számítjuk ki. Az integrálás határai: –1, illetve 3. Mivel a $[-1; 3]$ zárt intervallumon $f(x) \geq g(x)$, ezért a kérdéses terület: $\int_{-1}^{3} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$.

c) $h'(x) = \left(\frac{x^2-2}{2x+1}\right)' = \frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2} = \frac{2(x+0{,}5)^2+3{,}5}{(2x+1)^2}$. A tört számlálója és nevezője is pozitív (a h értelmezési tartományán), így a tört értéke is pozitív. Tehát a függvény valóban szigorúan monoton növekvő.

(ESZÉV 2006.10/5)

a) A lecsiszolt testnek 24 csúcsa, 36 éle és 14 lapja van.

b) A talapzat felszínét kiszámíthatjuk, ha a 6 db nyolcszög területéhez hozzáadjuk a 8 db szabályos háromszög területét. A nyolcszög területe: a 12 dm oldalú négyzet területéből kivonjuk a 4 db egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, vagyis 2 db 3 dm oldalú négyzet területét: 126 dm^2. A szabályos háromszög oldala $3\sqrt{2}$, ezért területe $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ dm^2. Innen a keresett felszín $756 + 36\sqrt{3} \approx 818{,}35$ dm^2.

c) Legyen *m* az ajándéktárgy megrendelt tömege. Az összes tömeg $20m$. Foglaljuk táblázatba a csiszolt ajándéktárgyakról tudott információkat.

anyag	achát	hematit	zöld jade	gránát
gyakoriság	3 db	6 db	7db	4db
tömeg	0,99 *m*	0,995 *m*	1,015 *m*	

Jelöljük xm-mel a gránátból készített ajándéktárgy valódi tömegét. A tényleges össztömeg $20m$, innen $20m = 3 \cdot 0{,}99m + 6 \cdot 0{,}995m + 7 \cdot 1{,}015m + 4xm$. Ebből következik, hogy $x = 0{,}98875$. A gránát ajándéktárgyak tömege 1,125%-kal kisebb a megrendeltnél.

(ESZÉV 2016.10/7)

A $[2; 8]$ intervallumon a függvényértékek pozitívak, így $\int_2^t (x^2 - 2)\, dx = \int_t^8 (-x^2 + 10x + 10)\, dx$. Innen $\left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_2^t = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} + 10x\right]_t^8$, melyből $5t^2 + 8t - 228 = 0$. A keresett szám az egyenlet $[2; 8]$ intervallumba eső gyöke: $t = 6$. ($t = -7{,}5$ nem lehetséges.)