UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV-NY 2013.05/1)
Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) < 0.$

b) $2^{|2x-1|-2} > 1.$

(EFFM 1999-01/99.29/5)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

(EFFM 1996-98/97.5/5)
Egy 181π térfogatú csonkakúp alapköreinek r és R sugara, valamint az a alkotója között az $r : R : a = 4 : 11 : 25$ arány áll fenn. Határozza meg a sugarak és az alkotók hosszát!

(ESZÉV 2005.10/6)
A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	4	7	9	8	2

a) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását oszlopdiagramon!
b) Mennyi a jegyek átlaga?
c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából?
d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal?

(ESZÉV 2005.10/7)

a) A *KLMN* derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges *LM* szár egyenese körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! (π két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)

b) Az *ABCD* derékszögű érintőtrapéz *AB* és *CD* alapjai ($AC > CD$) hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges *AD* szárral vett érintési pontja negyedeli az *AD* szárat. Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!

(ESZÉV 2018.10/9)

a) Határozza meg a $p > 0$ valós paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)\,dx = 0$ telesüljön!

b) Adja meg az *a*, *b*, *c* valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi függvénynek $x = 2$-ben zérushelye, $x = 4$-ben lokális maximumhelye, $x = -1$-ben pedig inflexiós pontja legyen!

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Megoldások:

(ESZÉV-NY 2013.05/1)

a) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > \frac{1}{2}$, megoldása pedig: $x > 1$.

b) Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $]-\infty; -0{,}5[\cup]1{,}5; \infty[$.

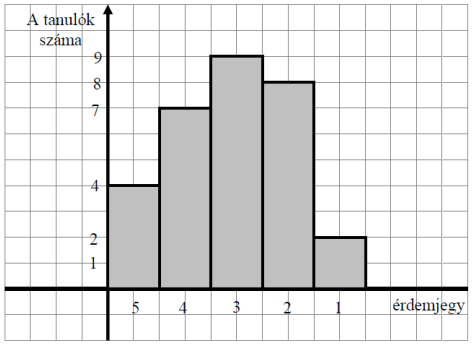
(EFFM 1999-01/99.29/5)

Kikötések: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Azonos átalakítással a $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ egyenlethez jutunk. Ebből a megoldások: $x_1 = k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

(EFFM 1996-98/97.5/5)

A feltétel szerint $r = \frac{4a}{25}$, $R = \frac{11a}{25}$, továbbá $a^2 = (R-r)^2 + m^2$. Az egyenletrendszerből a csonkakúp magassága $m = \frac{24}{25}a$. Ezeket az adatokat helyettesítve a csonkakúp térfogatképletébe $a = 12{,}5$, $r = 2$ és $R = 5{,}5$ adódik.

(ESZÉV 2005.10/6)



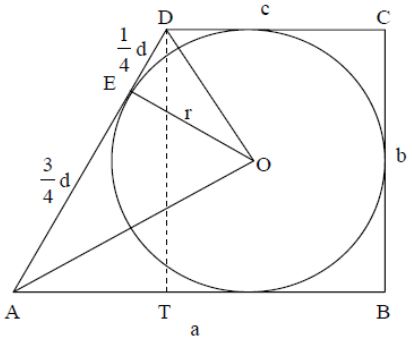
a) Tengelyfeliratok: *érdemjegy*, *a tanulók száma*.

b) A jegyek átlaga: $\frac{4\cdot5+7\cdot4+9\cdot3+8\cdot2+2\cdot1}{30} = 3{,}1$.

c) Legalább 3-mas osztályzatot $4 + 7 + 9 = 20$ tanuló kapott, így a keresett valószínűség: $P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

d) 2 tanuló kiválasztására $\binom{30}{2} = 435$ lehetőségünk van az osztályból. A kiválasztott tanulók osztályzatainak összege 3-mal osztható, ha az osztályzatok: $(1;2)$, $(1;5)$, $(2;4)$, $(3;3)$, $(4;5)$. A kedvező esetek száma így $2\cdot8 + 2\cdot4 + 8\cdot7 + \binom{9}{2} + 7\cdot4 = 144$. A keresett valószínűség: $P = \frac{144}{435} = \frac{48}{145} \approx 0{,}33$.

(ESZÉV 2005.10/7)



a) A kapott alakzat egy csonkakúp, magassága *LM*, az alapkörök sugarai pedig *KL* és *MN*. A csonkakúp térfogata: $V = \frac{m\cdot\pi}{3}\cdot(R^2 + r^2 + Rr) \approx 13326{,}47$ térfogategység.

b) Legyen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. A beírt kör sugara r, középpontja O, az AD oldallal vett érintési pontja E. A D-ből induló magasság talppontja az AB oldalon T. A feltételek alapján: $a + c = b + d = 20$ és $b = 2r$.

Mivel a trapéz szárain fekvő szögek összege 180º, és O a belső szögfelezők metszéspontja, ezért az AOD háromszög derékszögű. A magasságtétel és a feltétel alapján $r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$, így $b = 2r = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, azaz $d + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 20$, ahonnan $d \approx 10{,}72$. Továbbá TDA háromszög egy szabályos háromszög fele. Ezt felhasználva $b \approx 9{,}28$, $c \approx 7{,}32$ és $a \approx 12{,}68$ egység.

(ESZÉV 2018.10/9)

a) $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)\,dx = p^3 - 12p^2 + 20p = 0$, melyből $p = 0$; 2 és 10. A $p > 0$ feltétel miatt p lehetséges értékei 2 és 10.

b) A zérushelyre, lokális maximumhelyre és az inflexiós pontra vonatkozó feltétel miatt: $8a + 4b + 2c + 28 = 0$, $f'(-4) = 48a - 8b + c = 0$ és $f''(-1) = -6a + 2b$. A három egyenletből álló egyenletrendszer megoldása: $a = 1$, $b = 3$ és $c = -24$. Ellenőrzéssel megmutatható, hogy a kapott pontok megfelelnek a feladat feltételeinek.