UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

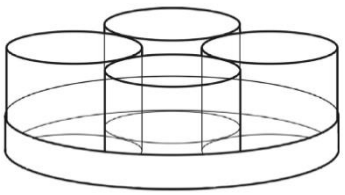
Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1996-98/96.25/1)
Egy dobozban piros és kék golyók vannak. Ha a dobozban egy piros golyóval kevesebb lenne, a golyók hetedrésze lenne piros. Ha viszont két kék golyót egy pirosra kicserélnénk, akkor a golyók ötödrésze lenne piros. Hány kék és hány piros golyó van a dobozban?

(ESZÉV 2006.02/2)
Az 52 941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52 941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk?
b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel?
c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

(ESZÉV 2017.05/3)
Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.



a) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.

b) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő?

(ESZÉV 2005.05/5)
Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?
b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?
c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található – mindegyik pontosan egyszer –, amelyekben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége?

Megoldások:

(EFFM 1996-98/96.25/1)

Ha a dobozban p db piros és k db kék golyó van, akkor a következő egyenletrendszer írható fel: $\frac{p-1}{p-1+k}=\frac{1}{7}$ és $\frac{p+1}{p+1+k-2}=\frac{1}{5}$. Innen $p=6$ és $k=30$.

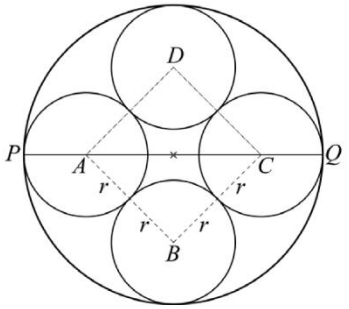
(ESZÉV 2006.02/2)

a) $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!=120$ darab ötjegyű számot kapunk.

b) Egy egész szám 12-vel pontosan akkor osztható, ha osztható 3-mal és 4-gyel. Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyeinek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal. 4-gyel ezek közül csak azok oszthatóak, amelyek utolsó két számjegye: 12, 52, 92, 24. Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha a két utolsó számjegyet rögzítettük, így az ötjegyű számok között $4\cdot 6=24$ db 12-vel osztható szám lesz.

c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21. Tehát a számok oszthatók 3-mal. 9-cel viszont nem oszthatók, így egyik szám sem lehet négyzetszám.

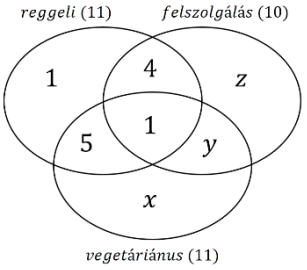
(ESZÉV 2017.05/3)



a) (A forgásszimmetria miatt) a négy pohár alapkörének négy középpontja egy négyzet négy csúcsa. (Az érintkező körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesre esnek, így) a négyzet oldala ugyanakkora, mint egy pohár átmérője: $2r$. A négyzet AC átlójának hossza $2r\sqrt{2}$. A PQ átmérőre igaz, hogy $20=2r+2r\sqrt{2}$, ahonnan $r=\frac{10}{1+\sqrt{2}}=4{,}14>4{,}1$ (cm), tehát igaz az állítás.

b) Mivel a pohár fala 2,5 mm vastag, így a belső sugara nagyobb. mint $(4{,}1-0{,}25=)\ 3{,}85$ cm. A pohár térfogata $V_{\text{pohár}}>3{,}85^2\cdot\pi\cdot 11\approx 512$ cm^3. Mivel $1\text{ dl}=100$ cm^3, ezért igaz, hogy belefér 5 dl üdítő a pohárba.

(ESZÉV 2005.05/5)



a) A diagram mutatja a különböző kategóriákba tartozó éttermek számát. 5 helyen van vegetáriánus menü, de nincs reggeli, azaz $x+y=5$.

b) A vegetáriánus helyek száma miatt: $y=5-x$, a felszolgálós helyek száma miatt: $z=x$. Így az összes vendéglők száma $11+2x+5-x=18$, ahonnan $x=2$, $y=3$ és $z=2$. Tehát $y+1=4$ étteremben szolgálnak fel vegetáriánus menüt.

c) Összesen 18 étterem van, ebből 11-ben lehet reggelizni. Az összes címet tartalmazó A urnából húzva $\frac{11}{18}\approx 0{,}61$ a nyerés valószínűsége. A 8 önkiszolgáló étterem közül 6-ban lehet reggelizni, így a B urnából húzva $\frac{6}{8}=0{,}75$ a nyerés valószínűsége, ezért a B urnából érdemes húzni.