UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1996-98/98.55/1)
Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{36-x}+\sqrt{4-2x}=8.$

b) $2\cdot 16^{\log_9(2x+1)}-4^{\log_9(2x+1)}=6.$

c) $\cos^4 x+\sin^2 2x=\frac{21}{16}.$

(ESZÉV 2011.05/1)
Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű szám képezhető?

(ESZÉV 2017.05/6)
Egy fémlemezből készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el.

a) Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, felül nyitott hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12%-nyi hulladék keletkezik?

Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezhordókat.

b) Mekkora annak a 200 liter térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

(ESZÉV 2015.10/8)
Dani sportlövészedzésre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

a) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

(ESZÉV-NY 2007.05/8)
Az *f* függvényt a $[0;5]$ intervallumon értelmezzük: $f(x)=3\cos x-\cos(-x)$.

a) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e? A válaszait indokolja!
- Az *f* függvény korlátos.
- Az *f* függvény minimumhelye és legnagyobb értéke is irracionális szám.

b) Mekkora területű síkidomot határol az *x* tengely $[0;5]$ intervalluma; az *y* tengely $[0;f(0)]$ intervalluma; az $x=5$ egyenes $[0;f(5)]$ intervalluma és az *f* függvény görbéje?

Megoldások:

(EFFM 1996-98/98.55/1)

a) A négyzetgyökök miatt $x \leq 2$. Az egyenlet az $x^2 + 448x = 0$ alakra hozható. Innen, a kezdeti feltételt is kielégítő megoldás: $x = 0$.

b) A logaritmus miatt $x > -\frac{1}{2}$. Az egyenlet $4^{\log_9(2x+1)}$-re nézve másodfokú egyenlet. Innen $4^{\log_9(2x+1)} = 2$, melyből $x = 1$ (az egyenlet megoldása).

c) Az egyenlet minden valós *x* értékre értelmezhető. Az egyenlet a $48\cos^4 x - 64\cos^2 x + 21 = 0$ alakra hozható. Innen $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\pm 0{,}76376$, melyből az egyenlet megoldásai az $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ és $x = \pm 0{,}7017 + n\pi$ gyöksorozatok, ahol $k, n \in \mathbf{Z}$.

(ESZÉV 2011.05/1)

(1. eset:) 6 darab 6-os jegy: 1 darab hatjegyű szám van. (2. eset:) 5 darab 5-ös 1 darab 1-es jegy: 6 ilyen szám van. (3. eset:) 4 darab 4-es, 2 darab 2-es jegy. Ezekből a számjegyekből $\binom{6}{4} = 15$ szám képezhető. (4. eset:) 3 darab 3-as, 2 darab 2-es, 1 darab 1-es jegy. Ebben az esetben $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$ szám van. Más eset nincs, tehát összesen 82, a feltételnek megfelelő hatjegyű szám van.

(ESZÉV 2017.05/6)

a) 200 liter = 200 dm^3. A hordó alapterülete $\frac{200}{8} = 25$ dm^2, a sugara pedig $\sqrt{\frac{25}{\pi}} \approx 2{,}82$ dm. A palást területe $2\pi \cdot 2{,}82 \cdot 8 \approx 142$ dm^2, a hordó kb. 167 dm^2 területű lemezből áll. A hordó gyártásához $\frac{167}{0{,}88} \approx 190$ dm^2 lemezre van szükség.

b) A henger magassága $m = \frac{200}{r^2\pi}$, így felszíne: $A(r) = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{200}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{400}{r}$. Deriválással megadható, hogy a függvény minimuma $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3{,}99$ (dm) és így $m = 3{,}99$ dm.

(ESZÉV 2015.10/8)

a) A pontosan 3 találat valószínűsége: $P(3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^5 = 0{,}2076$. Hasonlóan számolható ki a többi eset: $P(4) = 0{,}0865$, $P(5) = 0{,}0231$, $P(6) = 0{,}0038$, $P(7) = 0{,}0004$ és $P(8) = 0{,}0000$. Ezek összeg: 0,321 a keresett valószínűség.

b) $P(\text{legalább 1 találat}) = 1 - P(0\text{ találat})$, azaz $1 - 0{,}75^n \geq 0{,}95$, melyből $n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75} \approx 10{,}41$. Így Daninak legalább 11 lövésre van szüksége.

c) (Ha a második félév végén Dani egy lövésből *p* valószínűséggel ért el találatot, akkor három lövésből a pontosan egy vagy pontosan két találat valószínűsége) $P(1\text{ találat}) + P(2\text{ találat}) = 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 = 3p(1-p) = 0{,}72$. Ebből a következő egyenlet adódik: $3p^2 - 3p + 0{,}72 = 0$, melyből $p = 0{,}4$ vagy $p = 0{,}6$. A második félév végén tehát egy lövésből Dani 0,4 vagy 0,6 valószínűséggel ért el találatot.

(ESZÉV-NY 2007.05/8)

a) A $\cos x$ függvény párossága miatt $f(x) = 2\cos x$, ami korlátos, hiszen $-2 \leq f(x) \leq 2$. Nem igaz, hogy az *f* függvény minimumhelye és legnagyobb értéke is irracionális szám, mert az *f* függvény legnagyobb értéke 2, és ez nem irracionális szám.

b) A keresett síkidom három tartományból áll, ezek területét jelöljük rendre T_1, T_2 és T_3-mal. Mivel az *f* függvény folytonos, a keresett területeket integrálással számíthatjuk:
$T_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx = 2$, $T_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2|\cos x|\,dx = 4$ és $T_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{5} 2\cos x\,dx = 2\sin 5 + 2$, így $T \approx 6{,}082$.