UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2014.10/1)

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $2\sin x - 2\sin^2 x = \cos^2 x$.

b) $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$.

(ESZÉV 2009.10/4)

Az (a_n) mértani és a (b_n) számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja (-1).

a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját!

b) Milyen pozitív egész *n*-re lesz a két sorozat első *n* tagjának összege ugyanakkora?

(EFFM 1974-76/102/4)

Írja fel annak a legkisebb körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört és a $3x + 4y = 75$ egyenletű egyenest!

(ESZÉV-NY 2017.05/4)

a) Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az *x* tengelyt az *A* és a *B* pontban metszi.

b) Számítsa ki a parabola *B* pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a *B* pont első koordinátája pozitív!

(ESZÉV-NY 2006.05/5)

Egy középkori, román stílusban épült templom tornyának tetőrésze egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. A felújítás alkalmával ebben a tetőrészben egy olyan maximális méretű kocka alakú helyiséget alakítottak ki, amelynek járószintje a gúla alaplapján van, mennyezetének sarkai a gúla oldaléleire illeszkednek.

a) Mekkora a tetőtéri helyiség alapterülete, ha a gúla élei 8 m hosszúak?

b) A toronytető légterének hány százalékát foglalja el ez a helyiség?

(ESZÉV 2006.05/6)

Egy közvélemény-kutató intézet felméréséből kiderült, hogy a felnőttek 4%-a színtévesztő. Véletlenszerűen kiválasztunk 8 felnőttet abból a népességből, melyre ez a felmérés vonatkozott. Mekkora a valószínűsége, hogy közöttük

a) pontosan két személy színtévesztő?

b) legalább két személy színtévesztő?

A két valószínűség értékét ezred pontossággal adja meg! Ebben az intézetben 8 férfi és 9 nő dolgozik főállásban. Egy megbeszélés előtt, amikor csak ez a 17 főállású kutató jelent meg, a különböző nemű kutatók között 45 kézfogás történt. Tudjuk, hogy minden nő pontosan 5 férfival fogott kezet, és nincs két nő, aki pontosan ugyanazzal az öttel.

c) Lehetséges-e, hogy volt két olyan férfi is, aki senkivel sem fogott kezet?

Megoldások:

(ESZÉV 2014.10/1)

a) Az egyenlet $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ alakú, melyből $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

b) A logaritmusfüggvény értelmezése miatt $x > 0$. Az egyenlet $\left(5^{\lg x}\right)^2 - 4 \cdot 5^{\lg x} - 5 = 0$ alakú. Innen $5^{\lg x} = -1$ vagy 5. Mivel $5^{\lg x} > 0$, ezért csak a második ad megoldást, melyből $x = 10$.

(ESZÉV 2009.10/4)

a) Felírva mindkét sorozatban a hatodik elemet (az első elem és a kvóciens, illetve a differencia segítségével) kapjuk, hogy $q = -1$ és $d = -\frac{2}{5}$. Így a mértani sorozat első öt tagja: $1; -1; 1; -1; 1$ a számtani sorozaté pedig: $1; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}$.

b) A két sorozat első 1, vagy első 5, vagy első 6 tagjának összege ugyanakkora.

(EFFM 1974-76/102/4)

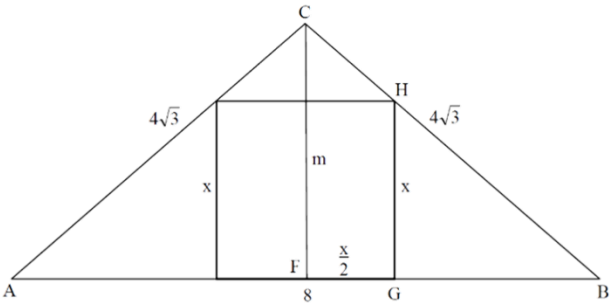
A keresett kör (körök) középpontja illeszkedik az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenesre, ami az adott egyenest a $(9; 12)$, a kört a $(3; 4)$ és a $(-3; -4)$ pontban metszi. A feltétel miatt az utóbbi eset nem megoldás. A kör középpontja $(6; 8)$, sugara 5, egyenlete: $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$.

(ESZÉV-NY 2017.05/4)

a) A parabola és az egyenes metszéspontjait: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Mivel a parabolaív a $[-2; 2]$ intervallumon az egyenes felett helyezkedik el, ezért a keresett terület: $T = \int_{-2}^{2}[(-x^2 + x + 6) - (x + 2)]\,dx = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$.

b) Az *x* tengellyel való metszéspontban $y = 0$, így $-x^2 + x + 6 = 0$. Innen: $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$. Mivel a *B* pont első koordinátája pozitív, $B(3; 0)$. Az f deriváltfüggvénye: $f'(x) = -2x + 1$ $(x \in \mathbf{R})$. A *B* pontban húzott érintő meredeksége $f'(3) = -5$.

(ESZÉV-NY 2006.05/5)



a) Az oldalélek kiszámításához vegyük a gúla csúcsára és két szemközti alapél felezőpontjára illeszkedő síkmetszetét. Az alapterület: $T = x^2 = \frac{64}{3+2\sqrt{2}} = 11$ (m^2).

b) A tetőtér (gúla) magassága: $4\sqrt{2}$ (m). A tetőtér térfogata: $V_t = 120{,}68$ (m^3), a kocka térfogata: $V_k = 36{,}38$ (m^3). A térfogatok aránya: $\frac{V_k}{V_t} = 0{,}3015$, azaz a helyiség közelítőleg 30%-át foglalja el a légtérnek.

(ESZÉV 2006.05/6)

a) Hipergeometrikus eloszlással kellene számolni, azonban az alaphalmaz elemszáma nem ismert. Mivel a feladatban ez „*elég nagy*”, a binomiális eloszlás is jó eredményt ad. Így pontosan két színtévesztő valószínűsége: $p = \binom{8}{2} \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^6 \approx 0{,}035$.

b) Legalább két színtévesztő valószínűsége pedig: $p = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^7\right] \approx 1 - (0{,}7214 + 0{,}2405) \approx 0{,}038$.

c) Ha lehetséges lenne, akkor összesen 6 férfival fogtak volna kezet a nők. Ezeket a „férfi ötösöket” $\binom{6}{5} = 6$-féleképpen lehet kiválasztani. Mivel 9 nő van, ezért a feltétel szerint kellene legalább 9 különböző férfi ötös. De ez ellentmondás, így nem lehetséges.