UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1996-98/98.33/1)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{2}{1-2x}+\frac{3}{2x+1}-\frac{6}{1-4x^2}=1.$$

(ESZÉV 2005.10/2)
Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.

a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt?

b) Legutóbb Dani és Ernő együtt érkezett a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek. Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal?

c) A fiúk mindig páros mérkőzéseket játszanak, ketten kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.) Hány különböző mérkőzés lehetséges?

(ESZÉV 2014.10/3)
Egy kereskedőcég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken.

a) Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő!

A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása!

(EFFM 1996-98/98.12/4)
Oldja meg a racionális számpárok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$9^{-1}\cdot 9^{\frac{x}{y}}-27\cdot 27^{\frac{y}{x}}=0;$$
$$\lg(x-2)-\lg(2-y)=0.$$

(EFFM 1992-94/4/4)
Egy *k* kör középpontjának abszcisszája –1. Az $A(7;4)$ pontból induló *AB* átmérő *B* végpontja az *x* tengelyen van. Írja fel a *k* kör egyenletét! Számítsa ki az *AB* átmérőre merőleges átmérő végpontjainak koordinátáit!

(EFFM 1966-85/252/7)
Állapítsa meg, hogy mely valós *x*-ekre pozitív az alábbi kifejezés értéke!

$$\sin x+2\cos x-1.$$

Megoldások:

(EFFM 1996-98/98.33/1)

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha $x \neq \pm\frac{1}{2}$. Rendezés után az egyenlet $2x^2 - x - 1 = 0$ alakú, melynek megoldásai 1 és $-\frac{1}{2}$. A kikötést figyelembe véve csak az első gyök felel meg a feltételeknek.

(ESZÉV 2005.10/2)

a) A kézfogások száma: $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$.

b) Mivel Dani és Ernő együtt érkezett, ezért négy különböző időpontban érkezhettek. A lehetséges érkezési sorrendek száma: $4! = 24$.

c) Minden mérkőzés során egy fiú pihen, ezért a pályán levő négy játékosra 5 lehetőség van. A pályán lévő négy fiúból kettő kiválasztására $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség van. Viszont ekkor minden mérkőzést kétszer számolunk, így rögzített pihenő fiú esetén 3 különböző teniszparti lehetséges. Ezek alapján a lehetséges páros mérkőzések száma: $5 \cdot 3 = 15$.

(ESZÉV 2014.10/3)

a) Ha a bolti eladásokból b, az internetesekből $0{,}7b$ bevétel van, akkor x év múlva (a bevételek egyenlősége miatt) $1{,}04^x \cdot 0{,}7b = 0{,}98^x \cdot b$. Innen $0{,}7 = \left(\frac{0{,}98}{1{,}04}\right)^x \approx 0{,}9423^x$, azaz $x \approx \log_{0{,}9423} 0{,}7 \approx 6$. A két forrásból származó árbevétel így (közelítően) 6 év múlva lesz egyenlő.

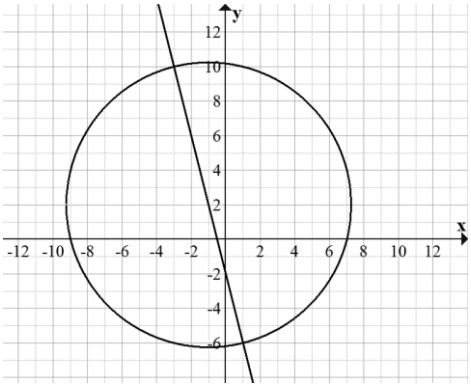
b) A reklamáció valószínűsége $\frac{1}{80}$, a nem reklamációé így $\frac{79}{80}$. Binomiális eloszlással számolva: $P(\text{legfeljebb 2 reklamál}) = P(\text{senki nem reklamál}) + P(1\text{ reklamál}) + P(2\text{ reklamál}) = \left(\frac{79}{80}\right)^{100} + \binom{100}{1}\left(\frac{1}{80}\right)^1\left(\frac{79}{80}\right)^{99} + \binom{100}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^2\left(\frac{79}{80}\right)^{98} \approx 0{,}2843 + 0{,}3598 + 0{,}2255 \approx 0{,}87.$

(EFFM 1996-98/98.12/4)

A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt $x - 2 > 0$, azaz $x > 2$ és $2 - y > 0$, azaz $y < 2$. Az egyenletek átalakítása után az $x + y = 4$ és $2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$ egyenletrendszerhez jutunk. Ennek a kezdeti feltételeket és az eredeti egyenletrendszert is kielégítő megoldása a $(3; 1)$ számpár.

(EFFM 1992-94/4/4)

Mivel $A(7; 4)$, B ordinátája 0 és a k kör K középpontja az AB átmérő felezőpontja, ezért K ordinátája 2, vagyis $K(-1; 2)$, a kör AK sugara pedig $\sqrt{68}$. Így a k kör egyenlete $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 68$. A $\mathbf{v}(4; 1)$ irányvektorú AB átmérőre merőleges CD átmérő egy irányvektora: $\mathbf{w}(-1; 4)$, egyenlete: $4x + y = -2$. A keresett metszéspontok koordinátáit a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai adják. Innen a CD átmérő végpontjai: $C(-3; 10)$ és $D(1; -6)$.



(EFFM 1966-85/252/7)

A feltétel szerint $\sin x + 2\cos x - 1 > 0$, melyből $2\cos x > 1 - \sin x$. A $\sin x$ korlátossága miatt ($\sin x \in [-1; 1]$) a jobb oldal nem negatív, így a bal oldal $2\cos x > 0$. Mindkét oldal négyzetre emelhető (ekvivalens művelet). Négyzetre emelés után: $5\sin^2 x - 2\sin x - 3 < 0$, melyből $-\frac{3}{5} < \sin x < 1$. Ennek megoldása a $2\cos x > 0$ (azaz $\cos x > 0$) feltételt figyelembe véve: $-0{,}2048\pi + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.