UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(EFFM 1996-98/98.25/1)
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{4}{\sqrt[3]{x}+1}+\frac{\sqrt[3]{x}+4}{5}=3.$$

(ESZÉV-NY 2009.05/6)
a) Hány hatjegyű számot lehet készíteni a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek többször is felhasználhatók?
b) A fenti hatjegyű számok között hány különböző számjegyekből álló, öttel osztható szám van?
c) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot képezhetünk, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?

(ESZÉV-NY 2017.05/8)
Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Ebben az időszakban a város lakói közül 80-an ugyanazon az autóbuszon utaznak.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az autóbusz 80 utasa között van legalább egy fertőzött? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

A járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik.

b) Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

(ESZÉV 2017.10/3)
Egy *n* elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

(ESZÉV 2005.05/8)
Az alábbi táblázat egy ország munkaképes lakosságának foglalkoztatottság szerinti megoszlását mutatja. Az adatok ezer főre kerekítettek.

	Ágazatok	2003. év *(ezer fő)*	2004. év *(ezer fő)*
Foglalkoztatottak	Mezőgazdaságban dolgozó	1020	
	Iparban dolgozó	1870	1926
	Szolgáltatásban dolgozó	5015	
Munkanélküli		595	
Munkaképes lakosság összesen		8500	

2004-ben
- az ország munkaképes lakosságának száma 3 ezrelékkel nőtt 2003-hoz képest,
- a munkanélküliek aránya a munkaképes lakosságban változatlan maradt,
- a szolgáltatásban dolgozók száma a 2003-ban ott dolgozók számának 2%-ával megnőtt.

a) Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait (ezer főre kerekítve)!
b) Ábrázolja kördiagramon a foglalkoztatottak ágazatok szerinti megoszlását 2003-ban!
c) Hány százalékkal változott a mezőgazdaságban dolgozók száma 2004-re a 2003-as állapothoz képest? Nőtt vagy csökkent?

Megoldások:

(EFFM 1996-98/98.25/1)

Az egyenlet $x = -1$-re nem értelmezett. A $\sqrt[3]{x} = y$ helyettesítéssel a $\frac{4}{y+1} + \frac{y+4}{5} = 3$ egyenletet kapjuk, amely az $y^2 - 10y + 9 = 0$ alakra hozható. Ennek a megoldásai az $y_1 = 1$ és $y_2 = 9$. Visszahelyettesítés után a keresett megoldások $x_1 = 1$ és $x_2 = 729$.

(ESZÉV-NY 2009.05/6)

a) Az első helyre ötféle szám kerülhet, a többi helyre hatféle, így $5 \cdot 6^5 = 38\,880$ darab hatjegyű számot készíthetünk.

b) A hatjegyű szám vagy nullára vagy ötre végződhet. Ha 0-ra végződik 5!, ha 5-re $4 \cdot 4!$ lehetőség van. Összesen $5! + 4 \cdot 4! = 216$ darab ilyen szám van.

c) Azon hatjegyű számok száma, amelyekben legalább egy számjegy ismétlődik, megkapható úgy, hogy a képezhető összes hatjegyű számok számából kivonjuk azoknak a hatjegyűeknek a számát, amelyek csupa különböző számjegyekből állnak: $5 \cdot 6^5 - 5 \cdot 5! = 38\,280$.

(ESZÉV-NY 2017.05/8)

a) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lakos nem fertőzött: 0,998. $P(\text{legalább 1 fertőzött}) = 1 - P(\text{senki nem fertőzött}) = 1 - 0{,}998^{80} \approx 0{,}15$.

b) A fertőzöttek aránya a teljes lakosságon belül minden nap az előző napi arány 1,05-szorosára nő. A keresett napok számát jelölje *x*, ekkor $0{,}2 \cdot 1{,}05^x = 1$. Innen $x = \frac{\lg 5}{\lg 1{,}05} \approx 32{,}99$. (Mivel a fertőzöttek száma növekszik, ezért) körülbelül 33 nap alatt érné el a fertőzöttek száma az összlakosság 1%-át.

(ESZÉV 2017.10/3)

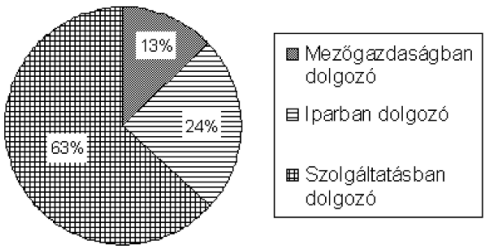
Az *n* elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak a száma $\binom{n}{4}$, a 2 eleméűeké $\binom{n}{2}$, tehát megoldandó az $\binom{n}{4} = 11 \cdot \binom{n}{2}$ egyenlet. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$, melyből $n^2 - 5n - 126 = 0$. Ennek pozitív gyöke a 14, tehát a halmaznak 14 eleme van.

(ESZÉV 2005.05/8)

a) A munkaképes lakosság száma 8526 (ezer) fő. A munkanélküliek aránya változatlan, ezért számuk 597 (ezer) fő. A szolgáltatásban dolgozók száma 5115 (ezer) fő. A mezőgazdaságban dolgozók száma $8525 - 597 - 1926 - 5115 = 888$ (ezer) fő.

	2003. év (*ezer fő*)	2004. év (*ezer fő*)
Mezőgazdaság	1020	888
Ipar	1870	1926
Szolgáltatás	5015	5115
Munkanélküli	595	597
Összesen	8500	8526

b) 2003-ban a foglalkoztatottak száma 7905 ezer fő. A kördiagramon a mezőgazdaságban, iparban, szolgáltatásban dolgozókat szemléltető körcikkek középponti szöge az aránynak megfelelően:
$\frac{1020}{7905} \cdot 360° \approx 46°$, $\frac{1870}{7905} \cdot 360° \approx 85°$-os, illetve
$\frac{5015}{7905} \cdot 360° \approx 228°$-os.



c) $\frac{888}{1020} \approx 0{,}87$, így a csökkenés közelítően 13%-os.