UTASÍTÁS A FELADATOK MEGOLDÁSÁHOZ

Ügyeljen az áttekinthető, világos munkára! Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt áthúz, az mindenképpen érvénytelennek tekintendő. Ha egy megoldást, vagy abból egy részt újrakezd, akkor csak a legutolsó változat értékelhető. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben oldhatja meg. Minden feladatnál közölje a részletszámításokat is!

(ESZÉV 2006.02/1)

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\cos 2x + 4\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0\,.$$

(ESZÉV 2014.10/2)

Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m^2-nyi falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?
b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben? Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg!

(ESZÉV 2011.05/4)

Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll. A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl?
c) Igazolja a modell alapján, hogy 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor!

(ESZÉV-NY 2012.05/6)

Adott az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény. Grafikonjának tengelypontja a $T(4; 2)$ pont, és a $P(2; 0)$ pont is illeszkedik a grafikonra.

a) Számítsa ki az *a*, *b*, *c* együtthatók értékét!
b) Írja fel a grafikon 3 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét!
c) Számítsa ki az *f* grafikonja és az *x* tengely által határolt tartomány területet!

(ESZÉV 2011.05/7)

A nyomda egy plakátot 14 400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40 000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14 400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?
b) A 14 400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

Megoldások:

(ESZÉV 2006.02/1)

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ felhasználásával a megoldandó egyenlet $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$. A $\sin x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $-\frac{1}{2}$ és 3. A $\sin x = 3$ egyenletnek nincs megoldása, hiszen $\sin x$ maximális értéke 1. A $\sin x = -\frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ vagy $x = \frac{7\pi}{6} + l2\pi$, ahol $k, l \in \mathbf{Z}$. A kapott számok megoldásai az eredeti egyenletnek is.

(ESZÉV 2014.10/2)

a) Az egy fordulattal lefestett falfelület nagysága 80π cm^2. A teljes falfelület befestéséhez $\frac{400\,000}{80\pi} \approx 1592$ fordulatra van szükség. Ez kb. $1592 \cdot 3 = 4776$ ml (4,8 liter), azaz nem elegendő 4 liter festék.

b) 4 liter = (4 dm^3 =) 4000 cm^3. $4000 = 8^2 \cdot \pi \cdot m$, melyből $m = \frac{4000}{64\pi} \approx 19{,}9$ (cm). A festék tehát kb. 20 cm magasan állna a vödörben.

(ESZÉV 2011.05/4)

a) $n = 8$ és $p = 0{,}05$, a várható érték: $np = 0{,}4$.

b) Minden gép $1 - p = 0{,}95$ valószínűséggel indul be, így annak a valószínűsége, hogy mind a 8 gép beindul: $0{,}95^8 \approx 0{,}6634$.

c) A kérdéses esemény (A) komplementerének (B) valószínűségét számoljuk ki, azaz hogy legfeljebb 2 gép romlik el. $P(A) = 1 - P(B) = 1 - \left[0{,}95^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^6\right] \approx 1 - 0{,}9942 \approx 0{,}0058$. Tehát valóban 0,0058 (0,58%) a termelés leállításának a valószínűsége.

(ESZÉV-NY 2012.05/6)

a) A tengelypont koordinátái alapján *f* egyenlete: $y = a(x-4)^2 + 2$. *P* is illeszkedik a grafikonra, ezért $4a + 2 = 0$. Innen $a = -\frac{1}{2}$, így $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, ahonnan $b = 4$ és $c = -6$.

b) A megfelelő érintő iránytangense *f* deriváltjának az $x = 3$ helyen felvett értéke. $f'(x) = -x + 4$, így $m = f'(3) = 1$. Az $y = x + d$ egyenletű érintő illeszkedik *f* grafikonjának 3 abszcisszájú pontjára, amelynek második koordinátája $f(3) = \frac{3}{2}$. Innen $d = -\frac{3}{2}$, azaz az érintő egyenlete: $y = x - \frac{3}{2}$.

c) Az *f* zérushelyei 2 és 6, ezért $T = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x\right]_2^6 = \frac{16}{3}$.

(ESZÉV 2011.05/7)

a) 16 nyomólemez óránként 1600 plakát elkészítését teszi lehetővé, ezért a teljes mennyiséghez $\frac{14\,400}{1600} = 9$ szükséges. A nyomólemezek előállítási költsége és a munkaidő további költségének összege: $16 \cdot 2500 + 9 \cdot 40\,000 = 400\,000$ Ft.

b) Ha a nyomda *x* db nyomólemezt használ, akkor ennek költsége $2500x$ Ft. Az *x* db lemezzel óránként nyomda $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14 400 darab kinyomtatása $\frac{14\,400}{100x} = \frac{144}{x}$ órát vesz igénybe, és ez további $\frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$ forint költséget jelent. A két költség összege: $K(x) = 2500x + \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x}$ forint, ahol az *x* pozitív egész. Keressük a $K(x)$ függvény minimumát. $K'(x) = 2500 - \frac{5{,}76 \cdot 10^6}{x^2} = 0$, melyből $x = 48$ (mert $x > 0$). Mivel itt $K'(x)$ előjelet vált, ezért valóban minimum. Így 48 lemez esetén $K(48) = 240\,000$ Ft.