1. FELADAT
Egy zeneiskola egyik évfolyamán háromféle hangszeren tanulnak a diákok (mindenki tanul legalább egy hangszeren). Hegedülni 32-en, zongorázni 36-an, fuvolázni 28-an tanulnak. Három hangszeren senki sem tanul. Azok száma, akik pontosan két hangszeren játszanak 25, közülük hegedülni és zongorázni is tanulnak 8-an.

a) Hányan tanulnak csak fuvolán?
b) Hányan járnak erre az évfolyamra?

2. FELADAT
Adja meg az $A = \{x \in \mathbf{N} \mid (3x-1)(x-2)(x+1) = 0\}$ halmaz számosságát!

3. FELADAT
Bizonyítsa be, hogy az alábbi kifejezés értéke független x-től!

$$\left(1 - \frac{2x-1}{3x-2}\right) \cdot \left(3 - \frac{1}{1-x}\right); \qquad x \neq \frac{2}{3}; 1.$$

4. FELADAT
Bizonyítsa be, hogy az $m^2 - 3m - 3$ kifejezés osztható 5-tel, ha m olyan természetes szám, amelyik 5-tel osztva 2-t ad maradékul!

5. FELADAT
Határozza meg a számrendszer x alapszámát, ha $1220_3 = 63_x$!

6. FELADAT
Ábrázolja, majd jellemezze (értelmezési tartomány, zérushely, szélsőérték helye és értéke, monotonitás, paritás, értékkészlet) az alábbi függvényeket!

$a)$ $f: [-4; 2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 + 2x - 3$. $b)$ $f(x) = |x+3| - |x-1|$.

7. FELADAT
A Huygens űrszonda 1997-ben indult, és több mint 7 éven keresztül repült az űrön át, hogy végül elérje célját. Ezalatt több mint 1400 millió kilométert tett meg. Adja meg az űrszonda által megtett utat méterben, normálalak használatával!

8. FELADAT
Legyenek $A =$ {hétvégén sok a tanulnivaló} és $B =$ {moziba megyek} kijelentések.

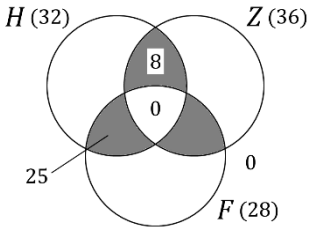
a) Adja meg szövegesen az $A \vee B$ és az $A \wedge B$ formulákat!
b) Írja le logikai műveletekkel a „*Ha hétvégén nem sok a tanulnivaló, akkor moziba megyek*” kijelentést!
c) Mi a (b) feladat kijelentésének logikai értéke, ha tudjuk, hogy hétvégén sok a tanulnivaló és moziba megyek?

9. FELADAT
Egy pénztárgépben 6 rekesz van a fémpénzek: 5 forintosok, 10 forintosok, 20 forintosok, 50 forintosok, 100 forintosok és 200 forintosok számára. A pénztárgép kezdetben üres, a vevők sorban aprópénzzel fizetnek.

a) Legkevesebb hány érme kell legyen a pénztárban, hogy valamelyik rekeszben biztosan legyen legalább kettő?
b) Legkevesebb hány érme kell legyen a pénztárban, hogy valamelyik rekeszben biztosan legyen legalább 11?

Megoldások:

1. FELADAT



a) Csak fuvolán $28-(25-8)=11$-en tanulnak.

b) Az évfolyamra $32+36+28-25=71$-en járnak.

2. FELADAT

$x=\frac{1}{3}; 2; -1$. Mivel csak $2\in\mathbf{N}$, ezért $A=\{2\}$, azaz $|A|=1$.

3. FELADAT

$\left(1-\frac{2x-1}{3x-2}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{3x-2-(2x-1)}{3x-2}\cdot\frac{3(1-x)-1}{1-x}=\frac{x-1}{3x-2}\cdot\frac{2-3x}{1-x}=\frac{x-1}{3x-2}\cdot\frac{3x-2}{x-1}=1,$

azaz a kifejezés valóban független x-től.

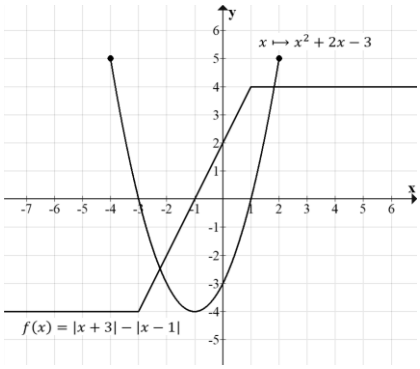
4. FELADAT

A feltétel szerint $m=5k+2$, ahol $k\in\mathbf{N}$. $m^2-3m-3=(5k+2)^2-3(5k+2)-3=25k^2+20k+4-15k-6-3=25k^2+5k-5$. Mivel a kifejezés minden tagja osztható 5-tel, ezért az egész kifejezés is, ami a bizonyítandó állítás.

5. FELADAT

Írjuk fel a számokat helyiértékes alakban: $1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3+0=6x+3$. Innen $x=8$, azaz a keresett számrendszer alapja 8.

6. FELADAT



a) A függvény teljes négyzetté alakítás után ábrázolható: $x\longmapsto x^2+2x-3=(x+1)^2-4$.

Jellemzése: ÉT: $x\in[-4;2]$. Zérushely: $x_1=-3$ és $x_2=1$. Szélsőérték: minimum hely: $x=-1$, érték: $y=-4$, maximum hely: $x=-4$ és 2, érték: $y=5$. Monotonitás: $x\in[-4;-1]$-ban szigorúan monoton csökkenő, $x\in[-1;2]$-ban szigorúan monoton növekvő. Paritás: se nem páros, se nem páratlan. ÉK: $y\in[-4;5]$.

b) ÉT: $x\in\mathbf{R}$. Zérushely: $x=-1$. Szélsőérték: minimum hely: $x\in]-\infty;-3]$, érték: $y=-4$, maximum hely: $x\in[1;\infty[$, érték: $y=4$. Monotonitás: monoton növekvő. Paritás: se nem páros, se nem páratlan. ÉK: $y\in[-4;4]$.

7. FELADAT

$1{,}4\cdot 10^{12}$ m.

8. FELADAT

a) $A\vee B=$ {hétvégén sok a tanulnivaló vagy moziba megyek},
$A\wedge B=$ {hétvégén sok a tanulnivaló és moziba megyek}.

b) $\neg A\Longrightarrow B$.

c) 1 (azaz igaz).

9. FELADAT

a) Legrosszabb esetben a 6 rekesz mindegyikében 1-1 pénzérme van (azaz 6 érme), így 7 érme esetén már biztosan lesz olyan rekesz, ahol legalább két érme van.

b) Legrosszabb esetben a 6 rekesz mindegyikében 10-10 pénzérme van (azaz 60 érme), így 61 érme esetén már biztosan lesz olyan rekesz, ahol legalább 11 érme van.