1. FELADAT
Egy 35 fős osztályban három nyelvet tanulnak, angolt, németet és franciát. Angolt 12-en, németet 15-en, franciát szintén 15-en tanulnak. Azok száma, akik nem tanulnak egy nyelvet sem feleannyi, azok száma pedig, akik mindhármat tanulják harmadannyi, a pontosan két nyelvet tanulók számának. Hányan nem tanulnak egy nyelvet sem az osztályban?

2. FELADAT
Végezze el a kijelölt műveleteket, majd a lehetséges összevonásokat!

$$(4x-1)(4x+1)-4(2x-1)^2-2(8x-1).$$

3. FELADAT
Egyszerűsítse a következő algebrai törtet!

$$1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}; \qquad x\neq 0;1;\frac{1}{2}.$$

4. FELADAT
Melyik az a törtszám, amelyikről a következő három dolgot tudjuk

a) értéke $\frac{2}{5}$;
b) számlálójának és nevezőjének összege kétjegyű szám;
c) e kétjegyű szám egy természetes szám négyzete?

5. FELADAT
Bizonyítsa be, hogy az alábbi kifejezés osztható 12-vel!

$2n^3-2n$, ahol $n\in\mathbf{N}$.

6. FELADAT
Milyen számok írhatóak az *X* és *Y* helyére, hogy a $\overline{38X27Y}$ szám osztható legyen

a) 4-gyel,
b) 6-tal? Válaszait indokolja meg!

7. FELADAT
Ábrázolja és jellemezze (értelmezési tartomány, zérushely, szélsőérték helye és értéke, monotonitás, paritás, értékkészlet) az alábbi függvényeket!

a) $f:[-1;7]\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2{,}5.$ *b)* $f(x)=|x|+2x-1.$

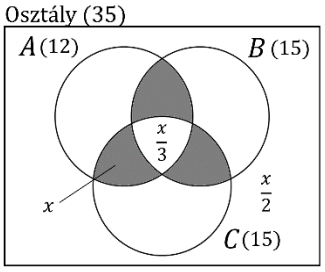
8. FELADAT
Egy 8 fős baráti összejövetelen egyesek kézfogással köszöntötték egymást. Lehetséges-e, hogy minden jelenlévő különböző számú emberrel fogott kezet? Indokolja válaszát!

9. FELADAT
Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak!
„*Minden érettségi feladat egyszerű.*”

A) Minden érettségi feladat bonyolult.
B) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
C) Sok érettségi feladat bonyolult.
D) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

Megoldások:

1. FELADAT



Logikai-szita módszerével:

$35 = 12 + 15 + 15 - \left(x + 3 \cdot \frac{x}{3}\right) + \frac{x}{3} + \frac{x}{2}$, melyből $x = 6$.

Pontosan egy nyelvet így $35 - (6 + 3 + 2) = 24$ fő tanul.

2. FELADAT

$(4x-1)(4x+1) - 4(2x-1)^2 - 2(8x-1) = 16x^2 - 1 - 4(4x^2 - 4x + 1) - 16x + 2 = 16x^2 - 1 - 16x^2 + 16x - 4 - 16x + 2 = -3.$

3. FELADAT

$1 - \frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{2x-1}{x-1}} = 1 - \frac{x-1}{2x-1} = \frac{x}{2x-1}.$

4. FELADAT

A feltétel szerint a számláló és a nevező összege $2x + 5x = 7x$, ahol $x \in \mathbf{N}^+$, továbbá $7x = 16; 25; 36; 49; 64$ vagy 81. Ezek közül 7-tel a 49 osztható, azaz $x = 7$, így a keresett tört $\frac{14}{35}$.

5. FELADAT

$2n^3 - 2n = 2n(n^2 - 1) = 2n(n+1)(n-1)$. A kifejezés szorzatalakjából látható, hogy az egyik tényező osztható 2-vel. Mivel $n(n+1)(n-1)$ három szomszédos szám szorzata, ezért az egyik páros és valamelyik 3-mal is osztható, tehát a szorzatuk osztható 2-vel és 3-mal, azaz osztható 6-tal. Így az eredeti kifejezés biztosan osztható $2 \cdot 6 = 12$-vel is.

6. FELADAT

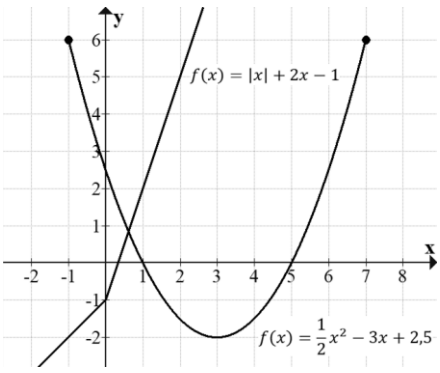
a) $y = 2; 6$, az *x* pedig (az előzőektől függetlenül) tetszőleges számjegy lehet.

b) Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal. A 2-vel való oszthatósági szabály miatt $y = 0; 2; 4; 6; 8$. A 3-mal való oszthatósági szabály miatt, ha $y = 0$ vagy 6, akkor $x = 1; 4; 7$, ha $y = 2$ vagy 8, akkor $x = 2; 5; 8$, ha $y = 4$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$.

7. FELADAT

a) ÉT: $x \in [-1; 7]$. Zérushely: $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. Szélsőérték: minimum hely: $x = 3$, érték: $y = -2$, maximum hely: $x = -1$ és 7, érték: $y = 6$. Monotonitás: $x \in [-1; 3]$-ban szigorúan monoton csökkenő, $x \in [3; 7]$-ban szigorúan monoton növekvő. Paritás: se nem páros, se nem páratlan. ÉK: $y \in [-2; 6]$.

b) ÉT: $x \in \mathbf{R}$. Zérushely: $x = \frac{1}{3}$. Szélsőérték: nincs. Monotonitás: szigorúan monoton növekvő. Paritás: se nem páros, se nem páratlan. ÉK: $y \in \mathbf{R}$.



8. FELADAT

Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban a csúcsok foka a feltétel szerint 0, 1, 2, …, 7 lehet. Viszont a 7-edfokú csúcs minden másikkal össze van kötve, a 0-adfokúval is, ami ellentmondás. Vagyis nincs ilyen gráf, azaz nem lehetséges, hogy mindenki különböző számú emberrel fogott kezet.

9. FELADAT

B.