1. FELADAT
Egy 90 férőhelyes szállodában több programot is szerveztek az ott lakóknak a két ünnep között: lehetett bowlingozni, várost nézni, és korcsolyázni is. A 90 vendégből 26-an vettek részt mindhárom programon, 6-an egyiken sem. 36-an voltak városnézésen és bowlingozni is, 34-en várost nézni és korcsolyázni. Hányan vettek részt csak a városnézésen, ha ugyanannyian voltak várost nézni, illetve bowlingozni, és nincs olyan, aki csak korcsolyázott?

2. FELADAT
Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!
$a)\ x^3 - x^2 - 25x + 25 = 0.$ $b)\ (x+1)^3 - (x-2)^3 = (3x-1)^2 - 1.$

3. FELADAT
Az a paraméter mely értékeinél van az alábbi egyenletnek 2-nél nagyobb gyöke?

$$\frac{x+2a}{3} = 4(x-a) + ax.$$

4. FELADAT
Az olyan prímszámpárokat, amelyek különbsége 2, ikerprímeknek nevezzük. Igazolja, hogy bármely két, háromnál nagyobb ikerprímszám összege osztható 12-vel!

5. FELADAT
Zsebszámológép használata nélkül döntse el, hogy melyik szám nagyobb és mennyivel az alábbiak közül! Megoldását részletezze!

$$A)\ \frac{1000^{-2} : \left(\frac{1}{100}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} : 100^2}; \qquad B)\ \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{3} \cdot 10000^{-5}}}.$$

6. FELADAT
Igazságtáblázat segítségével mutassa meg, hogy nincs olyan P és Q érték, amire hamis értéket adna a $(P \vee Q) \vee \neg P$ kifejezés!

7. FELADAT
Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Indokolja válaszait!
A) A kettes számrendszerben felírt 11100 szám tízes számrendszerbeli alakja 56.
B) Ha egy szám osztható 3-mal és 9-cel, akkor osztható 27-tel is.
C) Az egyjegyű négyzetszámok szorzata 36.

8. FELADAT
Egy konferencián az elhangzott előadások után a résztvevők 9 fős csoportokra oszlanak, hogy megvitassák a hallottakat. Ákos a csoportokról a következőket állította:

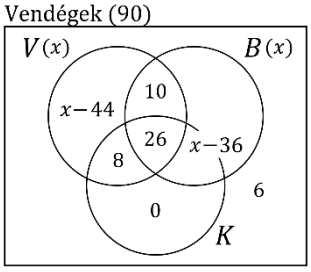
- Van olyan csoport, ahol mindenki pontosan 7 embert ismert korábban.
- Van olyan csoport, ahol pontosan 38 ismeretség volt korábban.

Döntse el, hogy lehet-e igaza Ákosnak! Válaszát indokolja!

9. FELADAT
a) Rajzoljon olyan 6 pontú összefüggő gráfot, melyben a csúcsok fokszámai: 4, 4, 2, 2, 3, 1.
b) Igazolja, hogy a fenti gráfnak van nyílt Euler-vonala, majd adjon meg egy ilyen vonalat!

Megoldások:

1. FELADAT



Jelölje x a városnézésen, illetve a bowlingozáson résztvevők számát. Ekkor csak városnézésen $x-44$ fő, bowlingozáson de nem városnézésen $x-36$ fő vett részt. A Venn-diagram jelöléseit felhasználva $90 = x-44+x-36+10+26+8+6$, ezért $x = 60$. Így csak a városnézésen 16 fő vett részt.

2. FELADAT

a) Szorzattá alakítás után az egyenlet $(x-5)(x-1)(x+5)=0$ alakú, melyből $x_1=-5$, $x_2=1$ és $x_3=5$.

b) Az egyenlet a $9x^2-9x+9=9x^2-6x$ alakra hozható, melyből $x=3$.

3. FELADAT

Az egyenlet megoldása $x=\frac{14a}{3a+11}$, ha $a \neq -\frac{11}{3}$ ($a=-\frac{11}{3}$ esetén ellentmondást kapunk). A feltétel szerint $\frac{14a}{3a+11}>2$, melyből $a<-\frac{11}{3}$ vagy $a>\frac{11}{4}$.

4. FELADAT

A feltétel szerint $p(>3)$ és $p+2$ prímszámok. Ebből következik, hogy $p+1$ páros és osztható 3-mal, azaz osztható 6-tal. $p+p+2=2p+2=2(p+1)$, azaz a kifejezés osztható $2\cdot 6=12$-vel, ami a bizonyítandó állítás.

5. FELADAT

Mivel $A=10^{-15}$ és $B=10^{-23}$, ezért *A* nagyobb *B*-nél 10^8-nal.

6. FELADAT

Az igazságtáblázat utolsó oszlopából láthatjuk, hogy semmilyen *P* és *Q* értékre nem ad hamis értéket a kifejezés.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \vee \neg P$
I	I	I	H	I
I	H	I	H	I
H	I	I	I	I
H	H	H	I	I

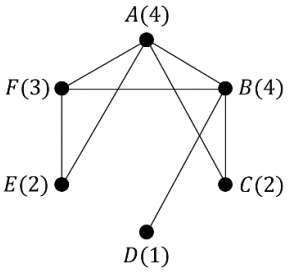
7. FELADAT

a) Hamis. $11100_2=30$.

b) Hamis. Ellenpélda pl. a 9.

c) Hamis. $0\cdot 1\cdot 4\cdot 9=0$.

8. FELADAT



a) Egy lehetséges gráf:

b) A gráfban pontosan két páratlan fokszámú csúcs van, így van nyílt Euler-vonala: D-B-A-E-F-B-C-A-F.

9. FELADAT

Az első esetben az ismertségeket ábrázolhatjuk egy olyan gráfon, ahol minden pont fokszáma 7. Ekkor a gráfban a fokszámok összege 63. Mivel egy gráfban a fokszámok összege mindig páros, ezért ebben az esetben Ákosnak nem lehet igaza. A második esetben tudjuk, hogy egy 9 fős társaságban összesen 36 ismertség állhat fenn. Ezért Ákosnak nem lehet igaza.